বিশ্ববিদ্যাসংগ্রহ

১৩৫০ সাল হইতে ১৩৭৩ সাল অবধি বিশ্ববিদ্যাসংগ্রহের মোট ১৩৩ খানি পুস্তক প্রকাশিত হইয়াছে। গ্রন্থমুদ্রণের ব্যয় অত্যধিক বৃদ্ধি পাওয়ায় নির্দিষ্ট স্বল্পমূল্যে গ্রন্থপ্রকাশ সম্ভব নয় বলিয়া এবং অন্যান্য নানা প্রতিকূলতার জন্য এই গ্রন্থমালায় অনেক দিন কোনো গ্রন্থ প্রকাশিত হয় নাই; এমন-কি, বহু-সংখ্যক নিঃশেষিত পুস্তকের পুনর্মুদ্রণও সম্ভব হয় নাই। কিন্তু গ্রন্থগুলির উপযোগিতার কথা স্মরণ করিয়া, যে-সকল পুস্তকের জন্য পাঠকের আগ্রহ এখনো অব্যাহত আছে সেগুলি ক্রমশ পুনর্মুদ্রণের সিদ্ধান্ত গৃহীত হইয়াছে। পত্র লিখিলে পূর্ণ তালিকা প্রেরিত হইবে।

বিশ্ববিদ্যাসংগ্রহের পরিপূরক লোকশিক্ষা গ্রন্থমালার পূর্ণ তালিকা মলাটের তৃতীয় পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য। নিঃশেষিত গ্রন্থের মূল্য মুদ্রিত হইল না।

সম্ভাবনাতত্ত্ব

বিশ্বভারতী গ্রন্থনবিভাগ
কলিকাতা

নিবেদন

সাম্প্রতিক কালে সম্ভাবনাতত্ত্ব বিজ্ঞানচর্চায় একটি মুখ্য ভূমিকা গ্রহণ করেছে। দার্শনিক দৃষ্টিকোণ থেকেও এর বিশেষ আকর্ষণ রয়েছে। কিন্তু সম্ভাবনাতত্ত্ব সম্বন্ধে আলোচনা প্রধানত বিদেশে বিদেশী ভাষার মাধ্যমেই হয়েছে। বাংলা ভাষায় সম্ভাবনাতত্ত্বের উপর লেখা প্রবন্ধাদি বিশেষ চোখে পড়ে নি। বর্তমান পুস্তিকাটি সে অভাব খানিকটা মেটাতে সক্ষম হবে বলে আশা করছি।

ষষ্ঠ ও সপ্তম অধ্যায়ের কয়েকটি অংশ অনেক পাঠকের কাছে দুরূহ মনে হতে পারে। তবে এ অংশগুলো বাদ দিয়ে পড়লেও আলোচনার মূল ধারা অনুসরণে অসুবিধা হবে না বলেই আমার বিশ্বাস।

পরিভাষার ব্যাপারে আমি সাধারণভাবে 'চলন্তিকা' ও বিশ্ববিদ্যাসংগ্রহ গ্রন্থমালায় ডক্টর পূর্ণেন্দুকুমার বসু -রচিত 'রাশিবিজ্ঞানের কথা'-র সাহায্য নিয়েছি।

শ্রীঅতীন্দ্রমোহন গুণ

রাশিবিজ্ঞান-বিভাগ
প্রেসিডেন্সি কলেজ
কলিকাতা

স্বর্গত অধ্যাপক সুরেশচন্দ্র দত্ত মহাশয়ের

পুণ্যস্মৃতির উদ্দেশে

ও

অধ্যাপক ধীরেন্দ্রমোহন দত্ত

পরমশ্রদ্ধাস্পদেষু

সূচীপত্র

আলোচনার বিষয়বস্তু

ভূমিকা

ইংরেজি 'প্রবেবিলিটি' (probability) শব্দটি তাত্ত্বিক আলোচনায় দুটি ভিন্ন অর্থে ব্যবহৃত হয়। 'প্রবেবিলিটি'-র প্রতিশব্দ হিসেবে আমরা যদি 'সম্ভাবনা' কথাটি গ্রহণ করি, তবে কয়েকটি দৃষ্টান্ত দিয়ে এই প্রভেদটুকু বোঝানো যেতে পারে।

প্রথম অর্থটি হল সাধারণ আলাপ-আলোচনায় 'সম্ভাবনা' কথাটি ব্যবহার করার সময় যা আমাদের মনে থাকে। "আগামী কালের ফুটবল খেলায় ইস্টবেঙ্গল-এর চেয়ে মোহনবাগানের জেতার সম্ভাবনাই বেশি", "আসছে পাঁচ বছরের মধ্যে মানুষ মঙ্গলগ্রহে পাড়ি দেবে এমন সম্ভাবনা অনেক", "মহাভারত কোনো একজন মাত্র লেখক প্রণয়ন করেছেন এরূপ সম্ভাবনা নেই বললেই চলে" ইত্যাদি বাক্যে 'সম্ভাবনা' এই অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে। দেখতে হবে যে, 'সম্ভাবনা' এ ক্ষেত্রে কোনো উক্তি (proposition) সম্পর্কে প্রযোজ্য এবং প্রদত্ত তথ্যের আলোকে উক্তিটি কতখানি সপ্রমাণ তারই ধারণা পাওয়া যাবে এ থেকে।

দ্বিতীয় অর্থটি কোনো পরীক্ষার ফল সম্বন্ধে 'সম্ভাবনা' শব্দটি ব্যবহার করার বেলায় প্রযোজ্য হবে। অনেক ধরনের পরীক্ষা আছে যাদের প্রতিটি বার বার সম্পাদন করা যেতে পারে— বস্তুত এদের প্রতিটির অসীমসংখ্যক পুনরাবৃত্তির কথা কল্পনা করা যায়। মনে রাখতে হবে 'পরীক্ষা' বলতে আমরা বৈজ্ঞানিক তাঁর গবেষণাগারে যে পরীক্ষা সম্পাদন করেন শুধু তার কথাই ভাবছি না। মুদ্রা-নিক্ষেপণ, স্কুলের ছাত্রদের ওজন বা উচ্চতা নির্ণয়, কোনো কারখানায় উৎপাদিত দ্রব্যের গুণবিচার বা কোনো বিশেষ রোগে আক্রান্ত লোকদের উপর চিকিৎসার ফলাফল বিচার ইত্যাদি সাধারণ কাজকেও আমরা পরীক্ষা (experiment)-এর

পর্যায়ে ফেলছি। এরূপ পরীক্ষার পুনঃপুনঃ সম্পাদনে কোনো ফল, যাকে আমরা ঘটনা (event) বলব, কী অনুপাতে ঘটে 'সম্ভাবনা' বলতে এখানে তাই বোঝানো হবে। "অমুক কারখানায় তৈরি 'স্ক্রু'-র দৈর্ঘ্য 5 মিলিমিটার থেকে 5·1 মিলিমিটারের মধ্যে থাকার সম্ভাবনাই বেশি", "বাঙালির উচ্চতা 6 ফুটের অধিক হওয়ার সম্ভাবনা অতি অল্প", "একটি উৎকৃষ্ট মুদ্রা নিক্ষেপ করা হলে তার দু-দিকের কোনো একটি (যেমন 'রাজা') ওঠার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$" ইত্যাদি বাক্যে 'সম্ভাবনা' এই দ্বিতীয় অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে।

সম্ভাবনার এই দুই রূপকে পৃথক করে দেখতে হবে। দার্শনিক কারনাপ (Carnap)-এর মতো আমরাও প্রথমটিকে 'সম্ভাবনা$_1$' ও দ্বিতীয়টিকে 'সম্ভাবনা$_2$' বলে অভিহিত করতে পারি।

বর্তমান পুস্তিকায় আমাদের আলোচনা প্রধানত সম্ভাবনা$_2$-তে সীমাবদ্ধ থাকবে। তবে সবশেষে (নবম অধ্যায়ে) সম্ভাবনা$_1$ সম্বন্ধেও কিঞ্চিৎ আলোচনা করা হবে।

পারিসংখ্যানিক নিয়মানুগতা

উপরে সম্ভাবনা$_2$-এর প্রসঙ্গে যে-সব পরীক্ষার কথা বলা হয়েছে তাদের প্রকৃতি সম্বন্ধে একটু বিশদ ব্যাখ্যার প্রয়োজন আছে।

আমরা এখানে মুখ্যত একই পারিপার্শ্বিক অবস্থা, একই মুখ্য কারণ-প্রণালীর মধ্যে পরীক্ষার পুনঃপুনঃ অনুষ্ঠানের কথা ভাবছি। দেখা যাবে মুখ্য অবস্থার এই অপরিবর্তন সত্ত্বেও প্রতিবারে একই ফল পাওয়া যাচ্ছে না। পরীক্ষার ফল তাই কোনো নিয়ম মেনে চলছে না বলেই মনে হবে।

এই নিয়মহীনতার হেতু এই যে, মুখ্য অবস্থা স্থির রাখা হলেও এরূপ পরীক্ষার পুনঃপুনঃ সম্পাদন অনেক গৌণ কারণ দ্বারাও প্রভাবিত হয়।

আর এই গৌণ কারণগুলি নিয়ন্ত্রণে রাখা হয় না, হয়তো তা করা সাধ্যায়ত্ত নয়; অনেক ক্ষেত্রে এগুলি হয়তো আমাদের অজ্ঞাতেই কাজ করে চলে। মুদ্রা-নিক্ষেপণের বেলায় পরীক্ষাস্থলের তাপমাত্রা, আর্দ্রতা, বায়ুর চাপ, নিক্ষেপণে হাতের সঞ্চালন ইত্যাদি এরূপ গৌণ কারণ। এদের নিয়ন্ত্রণে রাখা হয় না বলেই গৌণ কারণসমূহের রূপ স্থানকাল-ভেদে পরিবর্তিত হতে পারে। এজন্যেই মুখ্য কারণপ্রণালীকে অপরিবর্তিত রাখা সত্ত্বেও প্রতিবারে একই ফল আশা করা যায় না। যে নিয়মহীনতা আমাদের চোখে পড়ে তার কারণ এই।

পরীক্ষার এক-একটি সংঘটন পৃথকভাবে নিলেই এই নিয়মহীনতা পরিলক্ষিত হয়। কিন্তু অনেক ক্ষেত্রেই বহু সংঘটন একত্রে নেওয়া হলে দেখা যাবে এই আপাত-নিয়মহীনতার পশ্চাতেও এক ধরনের নিয়ম কাজ করে চলেছে।

যেমন, ধরা যাক একটি নিখুঁত মুদ্রা নিক্ষেপ করা হচ্ছে। কোনো নির্দিষ্ট নিক্ষেপণে কী ফল পাওয়া যাবে— 'রাজা' (head) না 'ফুল' (tail)— তা আমরা আগে থেকে বলতে পারি না। কিন্তু মুদ্রাটি হাজার বার নিক্ষেপ করা হলে, আমরা আগেই বলে দিতে পারি যে, প্রায় পাঁচ শো বার 'রাজা' উঠবে। কারণ আমাদের অভিজ্ঞতায় দেখা যায় যে, মুদ্রার বহুসংখ্যক নিক্ষেপণে 'রাজা' যে অনুপাতে ওঠে $\frac{1}{2}$ থেকে তার সামান্যই প্রভেদ হয়।

আমরা n দিয়ে পরীক্ষা সম্পাদনের মোট সংখ্যা সূচিত করব আর এর মধ্যে কোনো বিশেষ ঘটনা A কতবার ঘটেছে তা (অর্থাৎ A-র পরিসংখ্যা) f (A) দিয়ে সূচিত করবে। তা হলে

$$f(A)/n$$

হল পরীক্ষার এই সম্পাদনসমূহে A-র আনুপাতিক পরিসংখ্যা (relative frequency)। আমরা যে কথাটা বলতে চাইছি তা হল এই যে,

পরীক্ষা যত বেশি বার সম্পাদন করা যাবে, ঘটনার আনুপাতিক পরিসংখ্যা ততই একটি ধ্রুব মানের ('সীমা'র) দিকে ধাবিত হবে। অর্থাৎ পরীক্ষা সম্পাদনের মোট সংখ্যা যতই বাড়বে, আনুপাতিক পরিসংখ্যার মানগুলির বৈষম্য ততই কমে আসবে এবং তাদের মধ্যে ধ্রুব মানের সন্নিকটে থাকার প্রবণতা বাড়বে।

নিম্নের ছক থেকে এ বৈশিষ্ট্য প্রতীয়মান হবে। এখানে n-এর তিনটি ভিন্ন মান (10, 100 ও 1000)-এর জন্যে মুদ্রা-নিক্ষেপণে যে ফল পাওয়া গিয়েছিল তা সংক্ষেপে দেখানো হয়েছে।[১] মুদ্রাটি 5n বার ছুঁড়ে ফলগুলিকে পাঁচটি সমান অংশে ভাগ করা হয়েছে এবং প্রতি অংশের জন্যে 'রাজা'র আনুপাতিক পরিসংখ্যা নির্ণয় করা হয়েছে।

	বৃহত্তম আনুপাতিক পরিসংখ্যা	ন্যূনতম আনুপাতিক পরিসংখ্যা	অন্তর
10 বার নিক্ষেপণের ফল (5টি সারির জন্যে)	0·600	0·300	0·300
100 বার নিক্ষেপণের ফল (5টি সারির জন্যে)	0·550	0·480	0·070
1000 বার নিক্ষেপণের ফল (5টি সারির জন্যে)	0·507	0·496	0·011

পরীক্ষার এই বৈশিষ্ট্যকে পারিসংখ্যানিক নিয়মানুগতা (statistical regularity) বলা হয়। এবারে বলা যায় যে, 'সম্ভাবনা' কথাটি (অর্থাৎ 'সম্ভাবনা$_2$') যে-সব পরীক্ষা এই ধরনের নিয়মানুগতা মেনে চলে শুধু তাদের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। এবং কোনো ঘটনার সম্ভাবনা বলতে যে 'সীমা'র দিকে আনুপাতিক পরিসংখ্যার প্রবণতা দেখা যায় তাকেই

১. H. Cramér, *The Elements of Probability Theory*, p. 26

বোঝানো হয়। যেমন, কোনো ঘটনার সম্ভাবনা কম (বা বেশি) বলতে আমরা এটাই বোঝাই যে, পরীক্ষার বহুসংখ্যক পুনরাবৃত্তিতে ঘটনাটি কম (বা বেশি) অনুপাতে ঘটবে।

শুধু মুদ্রা-নিক্ষেপণের মতো সামান্য পরীক্ষার বেলায় নয়, অন্য অনেক ক্ষেত্রেও যে পারিসংখ্যানিক নিয়মানুগতা ক্রিয়াশীল তা নিম্নের ছকটির দিকে তাকালে বোঝা যাবে। এখানে 1948 থেকে 1959 পর্যন্ত প্রতি বছরে পশ্চিমবঙ্গে জাত সকল শিশুর মধ্যে পুত্রসন্তানদের আনুপাতিক পরিসংখ্যা দেখানো হয়েছে।

বর্ষ	পুত্রসন্তানদের আনুপাতিক পরিসংখ্যা	বর্ষ	পুত্রসন্তানদের আনুপাতিক পরিসংখ্যা
1948	0·520	1954	0·519
1949	0·519	1955	0·518
1950	0·522	1956	0·521
1951	0·520	1957	0·521
1952	0·520	1958	0·521
1953	0·523	1959	0·520

এখানেও এক ধরনের পরীক্ষার কথা ভাবা হচ্ছে বলা যায়। এই পরীক্ষায় পশ্চিমবঙ্গে জাত কোনো শিশু পুত্রসন্তান কি কন্যাসন্তান তাই লক্ষ করা হচ্ছে। যেহেতু প্রতি বছর পশ্চিমবঙ্গে বহু শিশুর (কয়েক লক্ষ) জন্ম হচ্ছে, তাই পরীক্ষাটিও প্রতি বছর বহুবার সংঘটিত হচ্ছে বলা চলে। আর যে ঘটনায় আমরা আগ্রহী, তা নবজাত শিশু পুত্র-সন্তান হলেই শুধু ঘটছে। ছক থেকে দেখা যাচ্ছে এই ঘটনার আনুপাতিক পরিসংখ্যা বছরের পর বছর 0·52-র কাছাকাছি থাকছে। ফলে, পারিসংখ্যানিক নিয়মানুগতা এ ক্ষেত্রে ক্রিয়াশীল বলা চলে, এবং এও বলা

যায় যে, পশ্চিমবঙ্গে জাত কোনো শিশুর পক্ষে পুত্রসন্তান হওয়ার সম্ভাবনা প্রায় 0·52*।

লক্ষ করতে হবে যে, কোনো পদার্থের ওজন, দৈর্ঘ্য বা আয়তন যেমন বস্তুজগতের অঙ্গ, কোনো ঘটনার সম্ভাবনা (অর্থাৎ সম্ভাবনা$_2$)-ও তেমনি বস্তুজগতের অঙ্গ। এই কারণেই সম্ভাবনা$_2$-কে বস্তুনির্ভর সম্ভাবনা (objective probability) বলা যেতে পারে। সম্ভাবনা$_1$ সম্পর্কেও একই কথা বলা যায় কি না, সম্ভাবনা$_1$ বস্তুনির্ভর কি ব্যক্তিনির্ভর (subjective), তা আমরা পরে আলোচনা করব।

আমাদের প্রাত্যহিক জীবন ও সম্ভাবনা$_2$

সম্ভাবনা$_2$-এর ধারণাটি শুধু তাত্ত্বিক দিক থেকেই আকর্ষণীয় এমন মনে করা অনুচিত হবে। একটু ভাবলেই দেখা যাবে যে, আমাদের প্রাত্যহিক জীবনেও— হয়তো খানিকটা অচেতনভাবেই— আমরা সম্ভাবনার এই ব্যাখ্যায় অনেক সময় চালিত হই। ট্রেনভ্রমণে দুর্ঘটনার ঝুঁকি আছে জেনেও আমরা ট্রেনে চড়ি; কারণ আমাদের এও জানা আছে যে, এরূপ দুর্ঘটনার সম্ভাবনা সামান্যই অর্থাৎ ট্রেনযাত্রীদের মধ্যে দুর্ঘটনায় পড়েছেন এরূপ লোকের অনুপাত নগণ্য। তেমনি কেউ যখন বলেন যে, কোনো রোগের জন্যে একটি নতুন ওষুধ পুরোনো একটি ওষুধের চেয়ে বেশি ফলপ্রদ, তখন তিনি নিশ্চয় মনে মনে ব্যাধিনিরাময়ের সম্ভাবনা দুই ক্ষেত্রে কত তা তুলনা করে দেখেন। অন্য কথায়, যে-সকল রোগী কোনো একটি ওষুধ ব্যবহার করেছেন তাঁদের মধ্যে যে অনুপাতে ভালো ফল পাওয়া গেছে, তিনি তারই ভিত্তিতে ওষুধ দুটির একটা তুলনামূলক বিচার করেন।

সম্ভাবনার সংজ্ঞা

সম্ভাবনার গাণিতিক তত্ত্ব

প্রথম অধ্যায়ে উপস্থাপিত বিষয়বস্তুকে সম্ভাবনার শাস্ত্রসম্মত আলোচনার পশ্চাৎপট হিসেবে দেখা যেতে পারে। এবারে আমাদের লক্ষ্য হবে সম্ভাবনার একটি উপযুক্ত সংজ্ঞা নির্দেশ ও তার ভিত্তিতে সম্ভাবনা-তত্ত্বের একটি গাণিতিক রূপ দান। অর্থাৎ এমন কয়েকটি নিয়ম নির্ধারণ করতে হবে যার ভিত্তিতে এক বা ততোধিক ঘটনার সম্ভাবনা দেওয়া থাকলে সংশ্লিষ্ট অন্য ঘটনার সম্ভাবনাও নির্ণয় করা যাবে।

পুরাতন সংজ্ঞা

ধরে নেওয়া যাক আমাদের পরীক্ষা এমন ধাঁচের যে, তার ফল-গুলিকে কতকগুলি সমসম্ভাব্য (equally probable) অংশে ভাগ করা যেতে পারে। সমসম্ভাব্য ঘটনা বলতে কী বোঝায় তা প্রথমে বলা দরকার। দুই বা ততোধিক ঘটনা যদি এমন হয় যে, প্রাসঙ্গিক সকল তথ্যের পরিপ্রেক্ষিতে এদের কোনো একটি অন্যগুলির পরিবর্তে ঘটবে বলে আশা করার কারণ নেই, তবেই ঘটনাগুলিকে সমসম্ভাব্য বলা হবে।

এবারে ধরা যাক এরূপ সমসম্ভাব্য ফলের মোট সংখ্যা N এবং এদের মধ্যে N(A)-সংখ্যক ফল কোনো নির্দিষ্ট ঘটনা A-র অনুকূল (অর্থাৎ এদের যে-কোনো একটি ঘটলে A ঘটবে এবং বিপরীতভাবে, A ঘটলে এদের কোনো-একটি ঘটবে)। তা হলে A-র সম্ভাবনা P(A) হিসেবে আমরা নেব

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

এই হল সম্ভাবনার পুরাতন সংজ্ঞা (classical definition)। পুরাতন সংজ্ঞাটি অষ্টাদশ শতকের প্রথমভাগে জেকব বের্নুলি (Jacob Bernoulli)-র লেখায় প্রথম উপস্থাপিত হয়েছিল বলা চলে। লাপ্লাস (Laplace) ও উনবিংশ শতকের মধ্যভাগ পর্যন্ত অন্য যে-সব গাণিতিক সম্ভাবনাতত্ত্বে কাজ করেছেন, তাঁরাও এ সংজ্ঞাটিরই সাহায্য নিয়েছেন।

যেহেতু $O \leqslant N(A) \leqslant N$, তাই পুরাতন সংজ্ঞা অনুসারে

$$O \leqslant P(A) \leqslant 1$$

সমসম্ভাব্য ফলগুলির কোনোটিই যদি A-র অনুকূল না হয় (অর্থাৎ A যদি অসম্ভাব্য ঘটনা হয়), তবে $N(A)=O$ এবং

$$P(A)=O$$

আবার, প্রতিটি ফলই যদি A-র অনুকূল হয় (অর্থাৎ A যদি অবশ্যম্ভাবী ঘটনা হয়), তবে $N(A)=N$ এবং

$$P(A)=1$$

পুরাতন সংজ্ঞার তাৎপর্য সহজবোধ্য এবং দেখা যাবে কতকগুলি ক্ষেত্রে এর প্রয়োগও সহজেই করা যেতে পারে।

উদাহরণ 1. মনে করা যাক আমার কাছে এক প্যাকেট তাস আছে। তাসগুলি একই আকৃতি ও আয়তনের এবং একই উপাদানে তৈরি বলে আশা করা যেতে পারে। এবার তাসগুলি উল্টে নিয়ে ভালোভাবে মিশিয়ে পুরো প্যাকেট থেকে একটি তাস যদি চোখ বুজে টেনে নেওয়া যায়, তবে সেটি যে টেক্কার তাস হবে তার সম্ভাবনা কত ?

এখানে পরীক্ষার প্রকৃতি অনুসারে টেনে-নেওয়া তাসটি প্যাকেটের 52টি তাসের যে-কোনো একটি হতে পারে এবং এই 52টি ফলই সমসম্ভাব্য এরূপ মনে করা সংগত। এর মধ্যে 4টি ক্ষেত্রে টেক্কার তাস পাওয়া যাবে। তাই নির্ণেয় সম্ভাবনা $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$।

উদাহরণ 2. দুটি সিকি একত্রে ছোঁড়া হলে অন্তত একটিতে 'রাজা' পাওয়ার সম্ভাবনা কত ?

ধরে নেওয়া যাক যে, উভয় মুদ্রাই সুনির্মিত এবং নিক্ষেপ করার সময় এদের কোনো বিশেষ দিককে সজ্ঞানে সুবিধে দেওয়া হচ্ছে না। তা হলে প্রতি মুদ্রার বেলায় 'রাজা' ও 'ফুল' এই দুটি ফলকে সমসম্ভাব্য মনে করা যেতে পারে। তেমনি দুটি মুদ্রা মিলিয়ে পরীক্ষার মোট চারটি সমসম্ভাব্য ফল আছে বলা চলে ; যথা—'রাজা, রাজা', 'রাজা, ফুল', 'ফুল, রাজা' এবং 'ফুল, ফুল'। এর মধ্যে প্রথম তিনটি ক্ষেত্রে অন্তত একটি মুদ্রায় 'রাজা' পাওয়া যাচ্ছে। আমাদের নির্ণেয় সম্ভাবনা তাই $\frac{3}{4}$।

উদাহরণ 3. কমলালেবুর মরশুমে আমার এক বন্ধু ফলের দোকানে গিয়ে 5টা লেবু চাইলেন। দোকানদার তাঁকে 100 লেবুর একটা ঝুড়ি থেকে 5টা লেবু বের করে দিল। যদি ধরা যায় ঝুড়িতে 10টা টক লেবু ছিল, তবে বন্ধুর কেনা 5টার মধ্যে অন্তত 4টে লেবুই ভালো হবে এরূপ সম্ভাবনা কত ?

প্রথমে দেখতে হবে 100টি লেবু থেকে 5টি কতভাবে নেওয়া সম্ভব। নির্বাচিত প্রথম লেবুটি 100টির যে-কোনো একটি হতে পারে, দ্বিতীয়টি বাকি 99টির যে-কোনো একটি হতে পারে, ইত্যাদি। তাই 100টি থেকে 5টির নির্বাচন মোট $100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96$-টি বিভিন্ন রূপে হতে পারে। আবার, কমলালেবুগুলিকে একই আকৃতি ও আয়তনের বলে ধরে নিলে এই পন্থাগুলিকে সমসম্ভাব্য মনে করা যেতে পারে।

এবারে এদের মধ্যে কয়টি ক্ষেত্রে নির্বাচিত 5টি লেবুর মধ্যে অন্তত 4টি ভালো হবে দেখা যাক। 5টিই ভালো হবে $90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86$টি ক্ষেত্রে, প্রথমটি টক আর বাকি 4টি ভালো হবে $10 \times 90 \times 89 \times 88 \times 87$-টি ক্ষেত্রে ; দ্বিতীয়টি টক এবং অন্য 4টি ভালো হবে $90 \times$

$10\times89\times88\times87$-টি ক্ষেত্রে ; ইত্যাদি। সুতরাং নির্বাচিত 5টির মধ্যে অন্তত 4টি ভালো হবে মোট

$$90\times89\times88\times87\times86+5\times(10\times90\times89\times88\times87)$$
$$=90\times89\times88\times87\times136\text{-টি ক্ষেত্রে।}$$

নির্ণেয় সম্ভাবনা তাই

$$\frac{90\times89\times88\times87\times136}{100\times99\times98\times97\times96}=\frac{89\times493}{98\times485}$$
$$=0{\cdot}9231 \text{ (আসন্ন মান)}$$

পুরাতন সংজ্ঞার সহজবোধ্যতা সত্ত্বেও স্পষ্টতই এর প্রযোজ্যতা অতি সীমিত। কারণ, পরীক্ষার ফলগুলিকে সমসম্ভাব্য ঘটনায় ভাগ করা খুব অল্প ক্ষেত্রেই সম্ভব হবে। মুদ্রা-নিক্ষেপণ, ছক্কা-নিক্ষেপণ, তাস খেলা ইত্যাদি সরল, কিন্তু বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিতে অকিঞ্চিৎকর, পরীক্ষার বাইরে এই সংজ্ঞার ব্যবহার তাই সাধারণত অসংগত হবে। এ-সব ক্ষেত্রে যে জিনিসগুলি নিয়ে কাজ করা হচ্ছে (যথা— সুনির্মিত মুদ্রা, ছক্কা, তাসের প্যাকেট ইত্যাদি), তাদের অন্তর্নিহিত একটি প্রতিসাম্য (symmetry) আছে, যার পরিপ্রেক্ষিতে পরীক্ষার ফলগুলিকে সমসম্ভাব্য মনে করা স্বাভাবিক হবে। কিন্তু ধরা যাক কোনো কৃষিকর্মী জানতে চান কোনো নার্সারি থেকে কেনা বাঁধাকপির বীজ বপন করা হলে তা থেকে চারা বেরোবার সম্ভাবনা কত। পুরাতন সংজ্ঞার সাহায্যে এ সম্বন্ধে কিছু বলা কি সম্ভব ?

আবার পুরাতন সংজ্ঞার ক্ষেত্রে পরীক্ষার ফলের মোট সংখ্যা (N)-কে সসীম হতে হবে। এই সংখ্যাটি অসীম হলে পুরাতন সংজ্ঞার প্রয়োগ —এর খানিকটা প্রসারণ ও পরিবর্তন ব্যতীত— সম্ভব নয়। উদাহরণ হিসেবে আমরা একটি আয়তাকার বোর্ড-এর কথা ভাবতে পারি, যার কেন্দ্রে একটি বৃত্ত আঁকা আছে। এই বোর্ডটির উপর একটি বিন্দু নেওয়া হলে সেটির বৃত্তের মধ্যে পড়ার সম্ভাবনা কত ? পুরাতন সংজ্ঞার মাধ্যমে

এ সম্বন্ধে কিছু বলা সাধ্য নয়।

মুদ্রা-নিক্ষেপণ, ছক্কা-নিক্ষেপণ ইত্যাদি সরল পরীক্ষার বেলায়ও পুরাতন সংজ্ঞার প্রয়োগ ক্ষেত্র-বিশেষে অসংগত হতে পারে। ধরুন আমাদের কাছে এমন একটি মুদ্রা আছে যা সুনির্মিত নয়, যার 'রাজা'-র দিকটি অপেক্ষাকৃত ভারী। এখানে মুদ্রাটি নিক্ষেপ করা হলে 'রাজা'-র দিক উপরে আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$-এর চেয়ে কম হবে। কিন্তু 'রাজা' পাওয়ার সম্ভাবনা ঠিক কত হবে তা বলা পুরাতন সংজ্ঞার ভিত্তিতে সম্ভব নয়।

পুরাতন সংজ্ঞার অপর একটি দোষের প্রতিও দৃষ্টি আকর্ষণ করা দরকার। এই সংজ্ঞাটি 'সমসম্ভাব্য ফল'-এর ধারণার উপর প্রতিষ্ঠিত। কিন্তু 'সমসম্ভাব্য ফল' কী বোঝায় তা জানা থাকবে তখনই যখন সম্ভাবনা সম্বন্ধেও স্পষ্ট ধারণা থাকবে। 'সমসম্ভাব্য ফল'-এর ধারণার উপর সম্ভা-বনার সংজ্ঞার প্রতিষ্ঠা তাই নৈয়ায়িকের ভাষায় 'পুনরাবৃত্তি (circularity) দোষে' দুষ্ট।

সম্ভাবনার বিকল্প সংজ্ঞা

পুরাতন সংজ্ঞার দোষ-ত্রুটি সম্পর্কে সচেতন থেকে অনেক গাণিতিকই সম্ভাবনা-তত্ত্বকে উৎকৃষ্টতর সংজ্ঞার উপর স্থাপিত করার চেষ্টা করেছেন। এঁদের মধ্যে ফন মিসেজ (von Mises) ও কল্‌মগরভ (Kolmogorov)-এর নাম উল্লেখযোগ্য।

ফন মিসেজের মতে পরীক্ষার ফলের বিশেষ ধরনের অসীম ক্রম (infinite sequence)-ই সম্ভাবনাতত্ত্বের আসল বিষয়বস্তু। তিনি এর নাম দিয়েছেন 'বিশৃঙ্খল সমষ্টি' (irregular collective)। এরূপ সমষ্টিকে দুটি নিয়ম মেনে চলতে হবে :

1. সমষ্টিতে যে-কোনো নির্দিষ্ট প্রকৃতি-সমন্বিত ঘটনার আনুপাতিক

পরিসংখ্যার নির্দিষ্ট সীমা থাকবে।

2. সমষ্টির যে-কোনো অসীম আংশিক ক্রম (infinite subsequence)-এর কথা ভাবা যাক, যে আংশিক ক্রমের নির্বাচন-প্রণালী ঘটনাসমূহের প্রকৃতির উপর নির্ভরশীল নয়। কোনো ঘটনার আনুপাতিক পরিসংখ্যার সীমা সম্পূর্ণ সমষ্টির ক্ষেত্রে যা হবে, এরূপ আংশিক ক্রমের ক্ষেত্রেও তাই হবে।

(দৃষ্টান্তস্বরূপ একটি মুদ্রা-নিক্ষেপণের কথা ভাবা যেতে পারে। যদি 'রাজা'-র পরিবর্তে 'H' ও 'ফুল'-এর পরিবর্তে 'T' লেখা যায়, তবে এখানে অসীম ক্রমের রূপ নিম্নের ন্যায় হতে পারে :

H T T H H H T T H T H H T T T H···

এ ক্ষেত্রে অসীম ক্রমটিকে বিশৃঙ্খল সমষ্টি বলা যাবে যদি নিম্নের দুটি শর্ত পালিত হয় :

1. প্রথম n পদে H-এর আনুপাতিক পরিসংখ্যা n-এর মান বৃদ্ধি পাওয়ার সঙ্গে সঙ্গে একটি সীমার দিকে ধাবিত হবে।

2. অসীম ক্রম থেকে যদি কোনো আংশিক ক্রম এমন ভাবে নেওয়া যায় যে, এর নির্বাচন-প্রণালী সমষ্টির প্রকৃতির উপর নির্ভরশীল নয়, তা হলে এরূপ আংশিক ক্রমেও H-এর আনুপাতিক পরিসংখ্যা একই সীমার দিকে ধাবিত হবে।

স্পষ্টতই যদি অসীম ক্রম নিম্নের ন্যায় হয় :

H T H T H T H T···

যেখানে H ও T উভয়ই এক নিক্ষেপ অন্তর আসছে, তবে দ্বিতীয় শর্ত পালিত হবে না। কারণ, এরূপ ক্ষেত্রে সমস্ত সমষ্টির জন্যে H-এর আনুপাতিক পরিসংখ্যার সীমা $\frac{1}{2}$; অন্য দিকে অযুগ্ম সংখ্যার পদ নিয়ে আংশিক ক্রম গঠন করলে সীমা দাঁড়াবে 1, আর যুগ্ম সংখ্যার পদ নিলে সীমা হবে 0)।

ফন মিসেজের সংজ্ঞানুসারে কোনো ঘটনার সম্ভাবনা বলতে বিশৃঙ্খল সমষ্টিতে ঘটনাটির আনুপাতিক পরিসংখ্যার এই (গাণিতিক) সীমাটিই বোঝাবে।

কিন্তু ফন মিসেজের দৃষ্টিভঙ্গিকে সন্তোষজনক বলা যায় না। যদি প্রথম নিয়ম অর্থবহ হয়, তবে সমষ্টিকে কোনো গাণিতিক সূত্রে প্রকাশ করা সম্ভব, কিন্তু সমষ্টিকে যদি আবার দ্বিতীয় নিয়মও মেনে চলতে হয়, তবে এরূপ গাণিতিক সূত্র পাওয়া অসাধ্য মনে হবে। তাই এ সংজ্ঞায় একটি আত্মবিরোধিতা বর্তমান। বস্তুত এ সংজ্ঞায় সমষ্টির রূপ এত বিশেষ ধরনের হয়ে পড়বে যে, খুব স্বল্পসংখ্যক ক্ষেত্রেই সংজ্ঞাটি প্রয়োগ করা যাবে। তাই ব্যাবহারিক দিক থেকে এই দৃষ্টিকোণের বিশেষ সার্থকতা নেই।

বর্তমানকালে সম্ভাবনাতত্ত্বের আলোচনায় সাধারণত রুশ গাণিতিক কল্‌মগরভের দৃষ্টিভঙ্গিই সবচেয়ে গ্রহণযোগ্য বলে বিবেচিত হয়। আমাদের আলোচনাতেও মুখ্যত কল্‌মগরভের দৃষ্টিভঙ্গিই অনুসৃত হবে।

স্বীকার্যভিত্তিক সংজ্ঞা

গণিতের অন্য অনেক শাখার মতোই সম্ভাবনাতত্ত্বকে কল্‌মগরভ কয়েকটি স্বীকার্য (axiom)-এর উপর প্রতিষ্ঠিত করেছেন।

প্রথম স্বীকার্য: (কোনো পরীক্ষায়) যে-কোনো ঘটনা A-র সঙ্গে সংশ্লিষ্ট একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা P (A) থাকবে, যে সংখ্যাটিকে A-র সম্ভাবনা বলা হবে।

দ্বিতীয় স্বীকার্য: যে-কোনো ঘটনা A-র জন্যে

$$P(A) \geqslant 0$$

তৃতীয় স্বীকার্য: A ও B পরস্পর ব্যতিরেকী (mutually exclusive) ঘটনা হলে, অর্থাৎ তাদের যুগপৎ সংঘটন অসম্ভাব্য হলে,

$$P(A \text{ বা } B)=P(A)+P(B)$$

সাধারণভাবে, যদি A_1, A_2, A_3,⋯পরস্পর ব্যতিরেকী ঘটনা হয়, তবে

$$P(A_1 \text{ বা } A_2 \text{ বা } A_3 \text{ বা } \cdots)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\cdots$$

চতুর্থ স্বীকার্য : যদি A অবশ্যম্ভাবী ঘটনা হয়, তবে

$$P(A)=1$$

শেষ তিনটি স্বীকার্যই আনুপাতিক পরিসংখ্যার কয়েকটি প্রধান লক্ষণের দিকে দৃষ্টি রেখে নেওয়া হয়েছে।

প্রথমত, আনুপাতিক পরিসংখ্যা মাত্রই অঋণাত্মক সংখ্যা।

দ্বিতীয়ত, A ও B যে-কোনো দুটি পরস্পর ব্যতিরেকী ঘটনা হলে A বা B ঘটার পরিসংখ্যা A-র পরিসংখ্যা ও B-র পরিসংখ্যার যোগফলের সমান হবে। তাই A বা B ঘটার আনুপাতিক পরিসংখ্যাও A-র আনুপাতিক পরিসংখ্যা ও B-র আনুপাতিক পরিসংখ্যার যোগফলের সমান হবে।

তৃতীয়ত, A যদি নিশ্চিত ঘটনা হয়, তবে পরীক্ষার প্রতি অনুষ্ঠানে A ঘটবে। তাই সে ক্ষেত্রে A-র আনুপাতিক পরিসংখ্যা 1 হবে।

আবার, পরীক্ষা যতবারই সম্পাদন করা হোক-না কেন, অর্থাৎ পরীক্ষা-অনুষ্ঠানের সংখ্যা n যত বড়োই হোক-না কেন, উপরের তিনটি উক্তি প্রতি ক্ষেত্রেই খাটবে। সুতরাং এটা ধরে নেওয়াই স্বাভাবিক মনে হবে যে, ঘটনার সম্ভাবনার বেলায়ও এই তিনটি লক্ষণ বজায় থাকবে। কারণ সম্ভাবনা বলতে পরীক্ষার বহুসংখ্যক অনুষ্ঠানে ঘটনার আনুপাতিক পরিসংখ্যার 'সীমা'-কেই বোঝানো হয়েছে।

এ ভাবেই সম্ভাবনাতত্ত্বের দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ স্বীকার্য গঠন করা হয়েছে। অন্য স্বীকার্যের পরিবর্তে এই স্বীকার্যগুলিই কেন গ্রহণ করা হল— এ প্রশ্ন স্বভাবতই উঠতে পারে। অর্থাৎ আনুপাতিক পরি-সংখ্যার অন্য লক্ষণগুলি বাদ দিয়ে শুধু বিশেষ কয়েকটি লক্ষণই বেছে

নেওয়া হল কেন ? এই প্রশ্নটির উত্তর পেতে হলে গণিতের যে-কোনো শাখায় ব্যবহৃত স্বীকার্যসমূহের পক্ষে কী কী শর্ত পালন কাম্য তা ভেবে দেখতে হবে। স্বীকার্যগুলি সরল ও যথাসম্ভব স্বল্পসংখ্যক হবে এবং এদের মাধ্যমে একটি আত্মবিরোধিতা-মুক্ত, বাস্তবদৃষ্টিতে উপযোগী তত্ত্বে উপনীত হওয়া যাবে এটাই অভীপ্সিত। কল্‌মগরভের স্বীকার্যগুলি এই সব কয়টি শর্তই মেনে চলছে বলে দেখা যাবে।

স্বীকার্যমূলক আলোচনায় মৌল উপপাদ্য ও তাদের প্রয়োগ

সম্ভাবনার লক্ষণ

আমাদের আলোচনার মূলে কল্‌মগরভের পূর্বোক্ত চারটি স্বীকার্য থাকবে। সম্ভাবনার তিনটি লক্ষণ এ থেকে প্রত্যক্ষভাবে পাওয়া যাচ্ছে। এর অন্য লক্ষণগুলি কী দেখতে হলে স্বীকার্যগুলির প্রচ্ছন্ন অর্থ অনুধাবন করা দরকার। এবারে আমরা কয়েকটি উপপাদ্যের মাধ্যমে সম্ভাবনার এই অপর লক্ষণগুলি প্রকাশ করব। দেখা যাবে যে, সাধারণ আনু-পাতিক পরিসংখ্যার বেলায়ও অনুরূপ লক্ষণ বর্তমান।

উপপাদ্য 1

$\bar{A}$ যদি A-র পরিপূরক ঘটনা (complementary event) সূচিত করে অর্থাৎ A-র অঘটন সূচিত করে, তবে

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

প্রমাণ: A ও $\bar{A}$ পরস্পর ব্যতিরেকী ঘটনা। আবার এদের একটি ঘটবেই। তাই তৃতীয় স্বীকার্য অনুসারে

$$P(A \text{ বা } \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

এবং চতুর্থ স্বীকার্য অনুসারে

$$P(A \text{ বা } \bar{A}) = 1$$

সুতরাং $$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \text{ অর্থাৎ}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

উদাহরণ 1. একটি কারখানায় তৈরি ঘড়িগুলিকে 'উৎকৃষ্ট' ও 'নিকৃষ্ট' এই দুই শ্রেণীতে ভাগ করা হয়ে থাকে। বলা আছে যে, এরূপ

ঘড়ির পক্ষে উৎকৃষ্ট শ্রেণীর হওয়ার সম্ভাবনা 0·96। তা হলে ঘড়ি নিকৃষ্ট শ্রেণীর হবে এরূপ সম্ভাবনা, উপপাদ্য 1 অনুযায়ী,

$$1-0{\cdot}96=0{\cdot}04$$

অর্থাৎ বলা চলে যে, ঐ কারখানায় তৈরি অনেক ঘড়ি নিলে তাদের মধ্যে শতকরা প্রায় 4টি নিকৃষ্ট শ্রেণীতে পড়বে।

উপপাদ্য 2

A অসম্ভাব্য ঘটনা হলে, অর্থাৎ A-এর অঘটন নিশ্চিত হলে,

$$P(A)=0$$

প্রমাণ: A-এর অঘটন নিশ্চিত অর্থাৎ $\bar{A}$ অবশ্যম্ভাবী ঘটনা। তাই

$$P(\bar{A})=1$$

বা, উপপাদ্য 1 থেকে,

$$1-P(A)=1$$

সুতরাং

$$P(A)=0$$

উদাহরণ 2. কোনো কারখানায় শুধু সাদা রঙের ল্যাম্প বাল্‌ব তৈরি হয়। তা হলে, উপপাদ্য 2 অনুসারে, এই কারখানায় তৈরি বাল্‌ব লাল রঙের হবে এরূপ সম্ভাবনা শূন্য।

উপপাদ্য 3

ধরা যাক A কতকগুলি পরস্পর ব্যতিরেকী রূপে ঘটতে পারে, যথা $B_1, B_2, \cdots$। অর্থাৎ $B_1, B_2, \cdots$ পরস্পর ব্যতিরেকী ঘটনা, এদের কোনো একটি ঘটলে A ঘটে এবং A ঘটলে এদের কোনো-একটি ঘটে। তা হলে

$$P(A)=P(B_1)+P(B_2)+\cdots$$

প্রমাণ: কল্পনা অনুসারে

$$A = B_1 \text{ বা } B_2 \text{ বা} \cdots$$

তাই

$$P(A) = P(B_1 \text{ বা } B_2 \text{ বা} \cdots)$$
$$= P(B_1) + P(B_2) + \cdots$$

কারণ B_1, B_2, ইত্যাদি পরস্পর ব্যতিরেকী ঘটনা।

উদাহরণ 3. মুরগির ডিমকে গুণানুসারে 'ক', 'খ', 'গ', 'ঘ' ও 'ঙ'—এই পাঁচ শ্রেণীতে ভাগ করা যেতে পারে। 'ঘ' ও 'ঙ' শ্রেণীর ডিমকে নিকৃষ্ট প্রকৃতির বলে ধরা হয়। এখন, একটি খামারে দীর্ঘ অভিজ্ঞতায় দেখা গেছে যে, উৎপন্ন ডিমের শতকরা 25, 19, 23, 17 ও 16-টি যথাক্রমে 'ক', 'খ', 'গ', 'ঘ' 'ঙ' শ্রেণীতে পড়ে। তা হলে এই খামারে উৎপন্ন কোনো ডিমের পক্ষে নিকৃষ্ট প্রকৃতির হওয়ার সম্ভাবনা কত ?

এ ক্ষেত্রে কোনো একটি ডিমের পক্ষে 'ক', 'খ', 'গ', 'ঘ' ও 'ঙ' শ্রেণীভুক্ত হওয়ার সম্ভাবনা যথাক্রমে ·25, ·19, ·23, ·17 ও ·16 বলে ধরা যেতে পারে। সুতরাং উপপাদ্য 3 অনুসারে কোনো ডিমের পক্ষে নিকৃষ্ট প্রকৃতির হওয়ার সম্ভাবনা

'ঘ' শ্রেণীতে পড়ার সম্ভাবনা + 'ঙ' শ্রেণীতে পড়ার সম্ভাবনা

$$= \cdot 17 + \cdot 16 = \cdot 33$$

উপপাদ্য 4

যদি এমন হয় যে, A ঘটলে B ঘটবেই, তবে

$$P(A) \leqslant P(B)$$

প্রমাণ: A ঘটলে B ঘটবেই, কিন্তু B এমন ক্ষেত্রেও ঘটতে পারে যেখানে A ঘটে না। তাই বলা যায় B ঘটতে পারে A ও

'$\bar{A}$ ও B' এই দুই পরস্পর ব্যতিরেকী রূপে। ফলে, উপপাদ্য 3 থেকে,

$$P(B) = P(A) + P(\bar{A} \text{ ও } B)$$
$$\geqslant P(A)$$

কারণ দ্বিতীয় স্বীকার্য অনুসারে

$$P(\bar{A} \text{ ও } B) \geqslant 0$$

অনুসিদ্ধান্ত : ধরা যাক B অবশ্যম্ভাবী ঘটনা। তা হলে বলা যায় যে, কোনো ঘটনা A ঘটলে B ঘটবেই। তাই, উপপাদ্য 4 অনুসারে,

$$P(A) \leqslant P(B)$$

আবার, দ্বিতীয় ও চতুর্থ স্বীকার্য অনুযায়ী,

$$P(A) \geqslant 0,\ P(B) = 1$$

তাই A যে কোনো ঘটনা হলে

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

উদাহরণ 4. মনে করা যাক পঞ্চাশ বছরের বৃদ্ধের পক্ষে আরো (অন্তত) এক বছর বেঁচে থাকার সম্ভাবনা 0·92, তা হলে, অতিরিক্ত কোনো তথ্য দেওয়া না থাকলেও, উপপাদ্য 4 থেকে পঞ্চাশ বছরের বৃদ্ধের পক্ষে আরো দেড় বছর বেঁচে থাকার সম্ভাবনা সম্বন্ধে এটুকু বলা যায় যে, এই সম্ভাবনা 0·92-এর অনধিক হবে। কারণ কোনো ব্যক্তির পক্ষে আরো দেড় বছর বেঁচে থাকতে হলে তাকে আরো এক বছর বেঁচে থাকতেই হবে।

উপপাদ্য 5

A ও B যে-কোনো দুটি ঘটনা হলে

$$P(A \text{ বা } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ও } B)$$

প্রমাণ : মনে রাখতে হবে যে, এখানে A ও B পরস্পর ব্যতিরেকী

ঘটনা নাও হতে পারে। তাই 'A বা B' বলতে বোঝানো হচ্ছে A ও B এই দুটি ঘটনার মধ্যে অন্তত একটির সংঘটন। এখন 'A বা B' তিনটি পরস্পর ব্যতিরেকী রূপের যে-কোনো একটি রূপে ঘটতে পারে। এই তিনটি রূপ হল

$$\text{'A ও B', '}\bar{A}\text{ ও B' এবং 'A ও }\bar{B}\text{'}$$

(অর্থাৎ উভয়ের সংঘটন, শুধু B-র সংঘটন এবং শুধু A-র সংঘটন)। তাই, উপপাদ্য 3 অনুসারে,

$$P(A \text{ বা } B) = P(A \text{ ও } B) + P(\bar{A} \text{ ও } B) + P(A \text{ ও } \bar{B})$$

আবার একই উপপাদ্য অনুসারে,

$$P(A) = P(A \text{ ও } B) + P(A \text{ ও } \bar{B})$$

এবং

$$P(B) = P(A \text{ ও } B) + P(\bar{A} \text{ ও } B)$$

সুতরাং

$$\begin{aligned} P(A \text{ বা } B) &= [P(A \text{ ও } B) + P(A \text{ ও } \bar{B})] \\ &\quad + [P(A \text{ ও } B) + P(\bar{A} \text{ ও } B)] - P(A \text{ ও } B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \text{ ও } B) \end{aligned}$$

অনুসিদ্ধান্ত : এই উপপাদ্যটিকে দুইয়ের বেশি ঘটনার ক্ষেত্রেও প্রসারিত করা যাবে। যেমন,

$$\begin{aligned} P(A, B \text{ বা } C) &= P([A \text{ বা } B] \text{ বা } C) \\ &= P(A \text{ বা } B) + P(C) - P(\text{'A ও C' বা 'B ও C'}), \end{aligned}$$

উপপাদ্য 5 থেকে

$$\begin{aligned} &= P(A) + P(B) - P(A \text{ ও } B) \\ &\quad + P(C) \\ &\quad - \{P(A \text{ ও } C) + P(B \text{ ও } C) - P(A, B \text{ ও } C)\} \\ &= P(A) + P(B) + P(C) \end{aligned}$$

$$-P(A \text{ ও } B)-P(A \text{ ও } C)-P(B \text{ ও } C)$$
$$+P(A, B \text{ ও } C)$$

উদাহরণ 5. ধরা যাক কোনো রাশিবিজ্ঞানীর পক্ষে শিক্ষক হওয়ার সম্ভাবনা 0·19, গবেষক হওয়ার সম্ভাবনা 0·34 এবং শিক্ষক-গবেষক হওয়ার সম্ভাবনা 0·13। তা হলে কোনো রাশিবিজ্ঞানীর পক্ষে শিক্ষক বা গবেষক হওয়ার সম্ভাবনা কত হবে?

উপপাদ্য 5 অনুসারে, নির্ণেয় সম্ভাবনা

$$\begin{aligned} P(\text{ শিক্ষক বা গবেষক }) &= P(\text{ শিক্ষক}) + P(\text{ গবেষক }) \\ &\quad - P(\text{ শিক্ষক ও গবেষক }) \\ &= 0{\cdot}19 + 0{\cdot}34 - 0{\cdot}13 \\ &= 0{\cdot}40 \end{aligned}$$

স্বীকার্যমূলক আলোচনা ও পুরাতন সংজ্ঞা

মনে করা যাক আমাদের পরীক্ষার সম্ভাব্য ফলের সংখ্যা সসীম এবং এদের $e_1, e_2, \cdots, e_N$ দ্বারা সূচিত করা যাক। আবার ভাবা যাক যে, এই N-টি ফলের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট N-টি সংখ্যা $p_1, p_2, \cdots p_N$ যথাক্রমে দেওয়া রয়েছে। এদের প্রতিটিই অঋণ সংখ্যা এবং $p_1+p_2+\cdots+p_N=1$।

এবারে যে-কোনো ঘটনা A-র অনুকূল সকল ফলের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট p-সমূহের যোগফলকে A-র সম্ভাবনা P(A) হিসেবে দেখা যেতে পারে। কারণ, এ ক্ষেত্রে প্রত্যেক ঘটনা A-র জন্যে P(A) একটি সুনির্দিষ্ট সংখ্যা। দ্বিতীয়ত, প্রতি A-র জন্যে

$$P(A) \geqslant 0$$

তৃতীয়ত, A ও B যে-কোনো দুটি পরস্পর-ব্যতিরেকী ঘটনা হলে, 'A বা B'-এর অনুকূল ফলগুলির সঙ্গে সংশ্লিষ্ট p-সমূহের যোগফল

পেতে হলে, A-র অনুকূল ফলগুলির p-সমূহের যোগফল ও B-র অনুকূল ফলগুলির p-সমূহের যোগফল— এই দুটি সংখ্যা যোগ করতে হবে। ফলে,

$$P(A \text{ বা } B)=P(A)+P(B)$$

আবার, A যদি অবশ্যম্ভাবী ঘটনা হয়, তবে $e_1, e_2, \cdots, e_N$ এই প্রতিটি ফলই A-র অনুকূল হবে। তাই এক্ষেত্রে

$$P(A)=p_1,+p_2+\cdots+p_N$$
$$=1$$

সুতরাং এ-ভাবে নির্ণীত সম্ভাবনা-অপেক্ষক 'P' স্বীকার্যমূলক সংজ্ঞার চারটি শর্তই মেনে চলে। (লক্ষ করতে হবে যে, এখানে $P(e_1)=p_1$, $P(e_2)=p_2$ ইত্যাদি)।

এখন একটি বিশেষতর ক্ষেত্র নেওয়া যাক, যেখানে

$$p_1=p_2=\cdots=p_N=\frac{1}{N}$$

অর্থাৎ যেখানে পরীক্ষার ফলগুলি সমসম্ভাব্য। তা হলে, A-র অনুকূল ফলের সংখ্যা যদি N(A) হয়, তবে

$$P(A)=\frac{N(A)}{N}$$

তাই সম্ভাবনার পুরাতন সংজ্ঞাকে আমরা স্বীকার্যভিত্তিক সংজ্ঞার একটি বিশেষ রূপ হিসেবে দেখতে পারি। আর এই বিশেষ রূপটি তখনই প্রযোজ্য হবে যখন পরীক্ষার ফলের মোট সংখ্যা সসীম এবং এই ফলগুলিকে সমসম্ভাব্য বলে ধরা যেতে পারে।

শর্তাধীন সম্ভাবনা ও

ঘটনাসমূহের পারস্পরিক স্বাতন্ত্র্য

নিঃশর্ত সম্ভাবনা ও শর্তাধীন সম্ভাবনা

কোনো ঘটনার সম্ভাবনা বলতে আমরা এ পর্যন্ত যা বুঝিয়েছি তাকে ঘটনাটির নিঃশর্ত (unconditional) সম্ভাবনা বলা যেতে পারে। এটা কিন্তু স্পষ্টই প্রতীয়মান হবে যে, ঘটনা সম্পর্কে অতিরিক্ত (অর্থাৎ প্রদত্ত পরীক্ষার এটি একটি ফল এই তথ্যের উপরেও) কোনো তথ্য দেওয়া থাকলে সম্ভাবনার মান ভিন্ন হতে পারে। যেমন, কোনো ভারতীয় প্রাপ্তবয়স্ক পুরুষের উচ্চতা 5 ফুট 4 ইঞ্চি থেকে 5 ফুট 6 ইঞ্চির মধ্যে থাকার সম্ভাবনা এক জিনিস; আর যদি বলা থাকে ঐ ব্যক্তি পূর্ব-দেশীয় কোনো রাজ্যের (আসাম, বাংলা, বিহার বা ওড়িশার) অধিবাসী, তবে তার উচ্চতা এই দুই সীমার মধ্যে থাকার সম্ভাবনা সম্পূর্ণ অন্য জিনিস। কারণ, এটা সবারই জানা আছে যে, এই দুই সীমার মধ্যবর্তী উচ্চতাবিশিষ্ট পূর্বভারতীয় প্রাপ্তবয়স্ক পুরুষদের আনুপাতিক পরিসংখ্যা অনুরূপ উচ্চতাবিশিষ্ট সর্বভারতীয় প্রাপ্তবয়স্ক পুরুষদের আনুপাতিক পরিসংখ্যার তুলনায় যথেষ্ট বৃহত্তর হয়।

উপরের আলোচনা স্বভাবতই আমাদের মনে শর্তাধীন (conditional) সম্ভাবনার ধারণা জাগায় এবং তার নিম্নোক্ত সংজ্ঞার দিকে আমাদের চালিত করে।

A ও B আমাদের আলোচ্য পরীক্ষার সঙ্গে সম্পৃক্ত দুটি ঘটনা এরূপ মনে করা যাক এবং ধরা যাক P (B) ধনাত্মক সংখ্যা। এবারে ভাবা যাক পরীক্ষাটি n বার সম্পাদন করা হয়েছে। A, B এবং 'A ও B'-র পরিসংখ্যাকে আমরা যথাক্রমে f(A), f(B) এবং f(A ও B) দ্বারা সূচিত

করব। n যথেষ্ট বড়ো হলে, f (B) ধনাত্মক এরূপ ধরে নেওয়া যাবে, কারণ P(B) ও ধনাত্মক। ফলে, আমরা লিখতে পারি

$$\frac{f\ (A \text{ ও } B)}{f\ (B)} = \frac{f\ (A \text{ ও } B)/n}{f\ (B)/n}$$

এখন, প্রথম অধ্যায়ে পারিসংখ্যানিক নিয়মানুগতা সম্বন্ধে যা বলা হয়েছে, তা মনে রাখলে বলা যায় যে, n যতই বড়ো হবে f(B)/n ও f(A ও B)/n ততই যথাক্রমে P(B) ও P(A ও B) এই দুই 'সীমা'-র দিকে ঝুঁকবে। কিন্তু যেহেতু P(B) ধনাত্মক, তাই f(B) নিজেও সাধারণভাবে n-এর সঙ্গে সঙ্গে বাড়বে। ফলে, n বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে f(A ও B)/f(B) এই অনুপাতটিও ক্রমশ একটি 'সীমা'-র নিকটতর হবে এরূপ ভাবা সঙ্গত হবে।

f(A ও B)/f(B) এই সংখ্যাটিকে 'B ঘটেছে এই শর্ত-সাপেক্ষে A-র আনুপাতিক পরিসংখ্যা' হিসেবে দেখা যেতে পারে ; অর্থাৎ পরীক্ষার যে-সব অনুষ্ঠানে B ঘটেছে তাদের মধ্যে A কি অনুপাতে ঘটছে তারই ধারণা দিচ্ছে এই সংখ্যাটি। তাই এর 'সীমা'-টিকেই B-র সংঘটন সাপেক্ষে A-র সম্ভাবনা বলে ধরা যায়। A-র এই শর্তাধীন সম্ভাবনাকে আমরা P(A/B) রূপে সূচিত করব। আর উপরের আলোচনা থেকে P(A/B)-র সংজ্ঞা হিসেবে আমরা নেব :

$$P(A/B) = P(A \text{ ও } B)/P(B)$$

লক্ষ্য করতে হবে যে, শর্তাধীন সম্ভাবনাও প্রকৃতপক্ষে এক ধরনের সম্ভাবনা, কারণ এটি দ্বিতীয় অধ্যায়ে বিবৃত সম্ভাবনার চারটি স্বীকার্যই মেনে চলে।

উপরের সূত্রে A এবং/বা B যে-কোনো দুই বা ততোধিক ঘটনার অন্তত একটির সংঘটন বা তাদের যুগপৎ সংঘটন বোঝাতে পারে। যেমন, P(C) ধনাত্মক হলে

$$P(A \text{ বা } B/C) = P(\text{‘}A \text{ বা } B\text{’ ও } C)/P(C)$$
$$= P(\text{‘}A \text{ ও } C\text{’ বা ‘}B \text{ ও } C\text{’})/P(C)$$

এবং

$$P(A \text{ ও } B/C) = P(A, B \text{ ও } C)/P(C)$$

তেমনি, $P(B \text{ বা } C)$ ধনাত্মক হলে

$$P(A/B \text{ বা } C) = P(A \text{ ও ‘}B \text{ বা } C\text{’})/P(B \text{ বা } C)$$
$$= P(\text{‘}A \text{ ও } B\text{’ বা ‘}A \text{ ও } C\text{’})/P(B \text{ বা } C)$$

এবং $P(B \text{ ও } C)$ ধনাত্মক হলে

$$P(A/B \text{ ও } C) = P(A, B \text{ ও } C)/P(B \text{ ও } C)$$

উদাহরণ 1. একটি নিখুঁত ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে, প্রাপ্ত বিন্দুসংখ্যার পক্ষে যুগ্মসংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; কারণ এখানে পরীক্ষার মোট 6টি সমসম্ভাব্য ফল আছে বলা চলে (যেহেতু বিন্দুসংখ্যা 1, 2, 3, 4, 5 বা 6 হতে পারে) এবং এদের মধ্যে 3টি ক্ষেত্রে প্রাপ্ত বিন্দুসংখ্যা যুগ্মসংখ্যা (যথা— 2, 4 ও 6)। আবার, বিন্দুসংখ্যা যুগ্মসংখ্যা ও 6 হবে (অর্থাৎ 6 হবে) এরূপ সম্ভাবনা $\frac{1}{6}$। সুতরাং বিন্দুসংখ্যা যুগ্মসংখ্যা হবে এই শর্তসাপেক্ষে বিন্দুসংখ্যার পক্ষে 6 হওয়ার সম্ভাবনা

$$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

অন্যভাবে বলা যায়, ছক্কাটি যদি বহুবার নিক্ষেপ করা হয়, তবে যে-সব ক্ষেত্রে যুগ্ম বিন্দুসংখ্যা পাওয়া যাবে তার প্রায় এক-তৃতীয়াংশ ক্ষেত্রে বিন্দুসংখ্যা 6 হবে।

যৌগিক সম্ভাবনার নিয়ম

ক্ষেত্রবিশেষে $P(A \text{ ও } B)$ সরাসরি নির্ণয় করা কঠিন হতে পারে ; পক্ষান্তরে $P(B)$ ও $P(A/B)$-র মান নির্ণয় হয়তো সহজতর হবে। এরূপ

ক্ষেত্রে $P(B)$ ও $P(A/B)$-র প্রদত্ত মান থেকে আমরা শর্তাধীন সম্ভাবনার সংজ্ঞার পরিপ্রেক্ষিতে $P(A \text{ ও } B)$-র মান নিরূপণ করতে পারি। অর্থাৎ $P(B)$ ধনাত্মক হলে $P(A \text{ ও } B)$ এই যৌগিক সম্ভাবনাটি নিম্নের সূত্রানুসারে নির্ণীত হবে :

$$P(A \text{ ও } B) = P(B) \times P(A/B)$$

স্পষ্টতই, যদি $P(A)$ ও $P(B/A)$-র মান দেওয়া থাকে, তবে ঐ যৌগিক সম্ভাবনা নিম্নের বিকল্প সূত্রানুসারে নির্ণয় করা হবে :

$$P(A \text{ ও } B) = P(A) \times P(B/A)$$

(এখানে $P(A)$ ধনাত্মক বলে ধরা হয়েছে। অন্যথা $P(B/A)$ অর্থহীন হবে।)

এবারে ধরা যাক $P(A_1, A_2, \cdots \text{ ও } A_{n-1})$ ধনাত্মক সংখ্যা। $A_1, A_2, \cdots$ ও A_{n-1}-এর যুগপৎ সংঘটন

$A_1, A_2, \cdots$ ও A_{n-2}-এর যুগপৎ সংঘটন,

$A_1, A_2, \cdots$ ও A_{n-3}-এর যুগপৎ সংঘটন,

...

A_1 ও A_2-এর যুগপৎ সংঘটন,

এবং A_1-এর সংঘটন

সূচিত করে। তাই $P(A_1)$, $P(A_1 \text{ ও } A_2), \cdots$, $P(A_1, A_2, \cdots \text{ও } A_{n-2})$ এবং $P(A_1, A_2, \cdots \text{ ও} A_{n-1})$ এই সব কয়টি সংখ্যাই এক্ষেত্রে ধনাত্মক সংখ্যা। ফলে, এক্ষেত্রে $P(A_2/A_1)$, $P(A_3/A_1 \text{ ও} A_2), \cdots P(A_{n-1}/A_1, A_2 \cdots \text{ ও } A_{n-2})$ এবং $P(A_n/A_1, A_2 \cdots \text{ ও } A_{n-1})$ এই সব কয়টি শর্তাধীন সম্ভাবনাই অর্থবহ হবে। আর $P(A_1, A_2 \cdots \text{ ও } A_n)$ এই যৌগিক সম্ভাবনাটির মান নিম্নের সূত্রের মাধ্যমে নিরূপণ করা যাবে :

$$P(A_1, A_2 \ldots \text{ ও } A_n) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(A_3/A_1 \text{ ও } A_2) \times \cdots \times P(A_n/A_1, A_2 \cdots \text{ ও } A_{n-1})$$

উপপাদ্য 1

ধরা যাক B_1, B_2,··· পরস্পর-ব্যতিরেকী ঘটনা এবং এদের কোনো একটির সংঘটন অবশ্যম্ভাবী। এক্ষেত্রে যদি $P(B_1)$, $P(B_2)$,··· প্রত্যেকে ধনসংখ্যা হয়, তবে যে কোনো ঘটনা A-র সম্ভাবনা

$$P(A) = P(B_1) \times P(A/B_1) + P(B_2) \times P(A/B_2) + \cdots$$

প্রমাণ : তৃতীয় অধ্যায়ের উপপাদ্য 3 অনুসারে,

$$P(A) = P(A \text{ ও } B_1) + P(A \text{ ও } B_2) + \cdots$$

আবার, যৌগিক সম্ভাবনার নিয়ম অনুযায়ী,

$$P(A \text{ ও } B_1) = P(B_1) \times P(A/B_1), P(A \text{ ও } B_2) = P(B_2) \times P(A/B_2)$$

ইত্যাদি।

তাই উপপাদ্যের সত্যতা সুস্পষ্ট।

উদাহরণ 2. কয়েকটি আদমসুমারীর ভিত্তিতে দেখা গেছে যে, ভারতীয়দের মধ্যে শতকরা 6·1 জন বাঙালি, আবার বাঙালিদের মধ্যে শতকরা 69 জন নিরক্ষর। তাই বলা যায় কোনো ভারতীয়ের পক্ষে বাঙালি হওয়ার নিঃশর্ত সম্ভাবনা 0·061 এবং বাঙালি হওয়ার শর্তাধীনে নিরক্ষর হওয়ার সম্ভাবনা 0·69।

সুতরাং যৌগিক সম্ভাবনার নিয়মানুসারে, কোনো ভারতীয়ের পক্ষে একই সঙ্গে বাঙালি ও নিরক্ষর হওয়ার সম্ভাবনা $\cdot061 \times \cdot69$ বা প্রায় 0·042।

উদাহরণ 3. কোনো একটি কারখানায় তিন শিফ্‌টে কাজ চলে। প্রথম শিফ্‌ট্‌ থেকে কারখানার মোট উৎপাদনের 25%, দ্বিতীয় শিফ্‌ট্‌ থেকে 40% এবং তৃতীয় শিফ্‌ট্‌ থেকে বাকি 35% পাওয়া যায়। এ-ও জানা আছে যে, প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় শিফ্‌টে উৎপাদিত দ্রব্যের মধ্যে যথাক্রমে 2%, 4% ও 5% নিকৃষ্ট শ্রেণীর দ্রব্য।

এক্ষেত্রে কারখানায় প্রস্তুত কোনো দ্রব্যের পক্ষে নিকৃষ্ট শ্রেণীর

হওয়ার সম্ভাবনা (এটি ঠিক কোন শিফ্‌টে তৈরি যদি বলা না থাকে), উপপাদ্য 1 অনুসারে,

$$\cdot25\times\cdot02+\cdot40\times\cdot04+\cdot35\times\cdot05=0\cdot0385$$ বা প্রায় 0·04।

ঘটনাসমূহের পারস্পরিক স্বাতন্ত্র্য

শর্তাধীন সম্ভাবনার ধারণাটি স্বাভাবিকভাবেই দুই বা ততোধিক ঘটনার পারস্পরিক স্বাতন্ত্র্য (mutual independence)-এর ধারণা জাগায়।

মনে করা যাক আমাদের আলোচ্য পরীক্ষাটি এরূপ যে, $P(B)$ ধনরাশি— ফলে $P(A/B)$ অর্থবহ— এবং

$$P(A/B)=P(A)$$

এর অর্থ হবে এই যে, সম্ভাবনার দিক থেকে দেখতে গেলে A-র উপর B-র কোনো প্রভাব নেই। কারণ B ঘটেছে এই অতিরিক্ত তথ্যটুকু আলোচ্যমান পরীক্ষায় A-র সম্ভাবনায় কোনো পরিবর্তন আনছে না। এরূপ ক্ষেত্রে A (পারিসংখ্যানিক দৃষ্টিতে) B থেকে স্বতন্ত্র এরূপ বলা যেতে পারে।

লক্ষ্য করা দরকার এখানে যৌগিক সম্ভাবনার নিয়মানুসারে

$$P(A \text{ ও } B)=P(A)\times P(B)$$

এই সূত্রটিতে A ও B একই ধরনের ভূমিকা নিচ্ছে। ফলে, A-কে B থেকে স্বতন্ত্র বলার পরিবর্তে A ও B পরস্পর স্বতন্ত্র (mutually independent) এরূপ বলাই সংগত মনে হবে। বস্তুত, এই সূত্রটির মাধ্যমেই A ও B-র পারস্পরিক স্বাতন্ত্র্য সূচিত করা হয়। এর জন্যে $P(A)$ বা $P(B)$ ধনাত্মক কি না দেখার প্রয়োজন নেই— যদিও অন্যথায় $P(B/A)$ বা $P(A/B)$ অর্থহীন হয়ে পড়বে।

$P(A)$— বা $P(B)$— শূন্য হলে ঘটনা দুটির সম্পর্ক কী দাঁড়াবে লক্ষ্য করা যাক। যেহেতু

$$0 \leqslant P(A \text{ ও } B) \leqslant P(A),$$

সুতরাং P(A)-র মান শূন্য হলে P(A ও B)-র মানও শূন্য হবে। তাই এরূপ ক্ষেত্রে A ও B উপরের সূত্রটি মেনে চলবে এবং তাদের অবশ্যই পরস্পর স্বতন্ত্র বলে গণ্য করতে হবে।

উপপাদ্য 2

A ও B পরস্পর স্বতন্ত্র হলে

1. A ও $\bar{B}$,
2. $\bar{A}$ ও B

এবং 3. $\bar{A}$ ও $\bar{B}$

পরস্পর স্বতন্ত্র হবে। (বস্তুত, চারটি সম্পর্কের মধ্যে যে-কোনো একটি সত্য হলে অন্য তিনটিও সত্য হবে।)

প্রমাণ : 1. A ও B পরস্পর স্বতন্ত্র হওয়ায়

$$P(A \text{ ও } B) = P(A) \times P(B)$$

সুতরাং $P(A) - P(A \text{ ও } B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A) \times P(\bar{B})$।
আবার A দুটি পরস্পর ব্যতিরেকী রূপে ঘটতে পারে : 'A ও B' এবং 'A ও $\bar{B}$'। ফলে, $P(A) = P(A \text{ ও } B) + P(A \text{ ও } \bar{B})$। তাই —

$$P(A \text{ ও } \bar{B}) = P(A) - P(A \text{ ও } B)$$
$$= P(A) \times P(\bar{B})$$

অর্থাৎ A ও $\bar{B}$ পরস্পর স্বতন্ত্র ঘটনা।

2. A-র পরিবর্তে B ও B-র পরিবর্তে A নিলে 1 থেকে সরাসরিভাবে এই ফলটি পাওয়া যাবে।

3. তৃতীয় অধ্যায়ের উপপাদ্য 1 থেকে

$$P(\bar{A} \text{ ও } \bar{B}) = 1 - P(A \text{ বা } B)।$$

আবার, A ও B পরস্পর স্বতন্ত্র বলে, তৃতীয় অধ্যায়ের উপপাদ্য 5 থেকে

$$P(A \text{ বা } B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

সুতরাং

$$P(\bar{A} \text{ ও } \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B)$$
$$= [1 - P(A)]\,[1 - P(B)]$$
$$= P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$$

তাই A ও B পরস্পর স্বতন্ত্র হলে, $\bar{A}$ ও $\bar{B}$ পরস্পর স্বতন্ত্র হবে।

দুইয়ের অধিক ঘটনার পারস্পরিক স্বাতন্ত্র্য

প্রকৃতপক্ষে দুটি ঘটনার (যথা A ও B-র) ক্ষেত্রে পারস্পরিক স্বাতন্ত্র্যের জন্যে নিম্নের চারটি সম্বন্ধই সত্য হওয়া সংগত বলে মনে হবে :

$$P(A \text{ ও } B) = P(A) \times P(B),$$
$$P(A \text{ ও } \bar{B}) = P(A) \times P(\bar{B}),$$
$$P(\bar{A} \text{ ও } B) = P(\bar{A}) \times P(B)$$

এবং

$$P(\bar{A} \text{ ও } \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$$

কিন্তু উপপাদ্য 2 অনুসারে প্রথম সম্বন্ধটি সত্য হলে অপর তিনটি স্বতই সত্য হবে। তাই A ও B-র স্বাতন্ত্র্য প্রকাশ করার জন্যে প্রথম শর্তটিই শুধু উল্লেখ করা হয়।

সাধারণভাবে বলা যায়, r-টি পরস্পর স্বতন্ত্র ঘটনা $A_1, A_2, \cdots, A_r$ দেওয়া থাকলে উপরের ন্যায় 2^r-টি সম্বন্ধ খাটবে। কিন্তু এর মধ্যে $(2^r - r - 1)$-টি সম্বন্ধ সত্য হলে অন্যগুলি স্বতই সত্য হবে। তাই ঘটনাগুলি পরস্পর স্বতন্ত্র বোঝাতে হলে এই $(2^r - r - 1)$-টি সম্বন্ধ উল্লেখ করাই যথেষ্ট। যেমন, তিনটি ঘটনা A, B ও C-এর ক্ষেত্রে ঘটনাগুলিকে পরস্পর স্বতন্ত্র বলা হবে যদি নিম্নের $2^3 - 3 - 1 = 4$-টি সম্বন্ধ সত্য হয় :

$$P(A \text{ ও } B) = P(A) \times P(B),$$
$$P(A \text{ ও } C) = P(A) \times P(C),$$
$$P(B \text{ ও } C) = P(B) \times P(C)$$

এবং

$$P(A, B \text{ ও } C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

এই সম্বন্ধগুলির সত্যতা যাচাই করে প্রতিক্ষেত্রে দেখা যেতে পারে প্রদত্ত ঘটনাসমূহ পারিসংখ্যানিক দিক থেকে স্বতন্ত্র কি না। অনেক সময় কিন্তু আমরা ঘটনাগুলিকে প্রারম্ভেই পারিসংখ্যানিক দৃষ্টিভঙ্গিতে স্বতন্ত্র বলে ধরে নিই। তাদের প্রকৃত সম্বন্ধের সরলীকরণ হিসেবে এটা করা হতে পারে। কোনো ক্ষেত্রে আবার এমন হতে পারে যে, প্রদত্ত ঘটনাগুলি বস্তুগতভাবে (physically) স্বতন্ত্র। যেমন, সেলাই কলের ক্ষেত্রে A যদি ববিন খারাপ হওয়া বোঝায় এবং B সুঁচ খারাপ হওয়া বোঝায় এবং ববিন ও সুঁচ যদি দুই পৃথক যন্ত্রে দুই দল শ্রমিকের দ্বারা তৈরি হয়, তবে A ও B-কে বস্তুগতভাবে পরস্পর স্বতন্ত্র বলা যায়। এরূপ ক্ষেত্রে ঘটনাগুলিকে পারিসংখ্যানিক দৃষ্টিতেও পরস্পর স্বতন্ত্র বলে ধরে নেওয়া সমীচীন মনে হবে।

এভাবে প্রদত্ত ঘটনাসমূহকে আমরা যদি পরস্পর স্বতন্ত্র বলে মনে করি, তবে উপরের সূত্রগুলি প্রয়োগ করে প্রত্যেক ঘটনার নিঃশর্ত সম্ভাবনার ভিত্তিতে তাদের যুগপৎ সংঘটনের সম্ভাবনা নির্ণয় করা যাবে।

উদাহরণ 4. একটি বাক্সে লাল ও কালো এই দুই রঙের বল আছে। মোট N-টি বলের মধ্যে লাল বলের সংখ্যা Np ও কালোর সংখ্যা Nq ; আর এই বলগুলি অন্য সব দিক থেকে সম্পূর্ণ সদৃশ।

বাক্স থেকে চোখ বুঁজে পর পর দুটি বল নেওয়া হল, কিন্তু দ্বিতীয় বলটি নেওয়ার আগে প্রথমটি বাক্সে ফিরিয়ে দেওয়া হয়েছে। এখানে মনে করা যাক A বোঝায় যে, প্রথম বল কোনো বিশেষ রঙের (ধরা যাক

কালো) হবে এবং B তেমনি বোঝায় যে, দ্বিতীয় বল কোনো বিশেষ রঙের (ধরা যাক লাল) হবে।

তা হলে A ও B (পারিসংখ্যানিক দৃষ্টিতে) পরস্পর স্বতন্ত্র ঘটনা। কারণ, এখানে প্রথম বল কালো হওয়ার সম্ভাবনা (অর্থাৎ A-র সম্ভাবনা) $Nq/N=q$ এবং দ্বিতীয়টি লাল হওয়ার সম্ভাবনা (অর্থাৎ B-র সম্ভাবনা) $Np/N=p$। আবার, দুটি বল মোট $N\times N=N^2$ রকমে নেওয়া যেতে পারে এবং এর মধ্যে $Nq\times Np=N^2pq$ ক্ষেত্রে প্রথমটি কালো এবং দ্বিতীয়টি লাল হবে। তাই A ও B-র যুগপৎ সংঘটনের সম্ভাবনা $N^2pq/N^2=pq$, অর্থাৎ

$$P(A \text{ ও } B)=P(A)\times P(B)।$$

বাক্স থেকে দুইয়ের অধিক বল নিলেও দেখা যাবে বিভিন্ন নির্বাচনের ফলগুলি পরস্পর স্বতন্ত্র হবে।

উদাহরণ 5. পূর্বের উদাহরণের মতোই ধরা যাক বাক্সে Np-টি লাল ও Nq-টি কালো রঙের (কিন্তু অন্য সকল ভাবে সদৃশ) বল আছে এবং বাক্স থেকে পর পর দুটি বল নেওয়া হয়েছে। কিন্তু এবারে দ্বিতীয় বলটি তোলার আগে প্রথম বলটি আর বাক্সে ফেরত দেওয়া হল না।

এখানে $P(A \text{ ও } B)$, অর্থাৎ প্রথম বল কালো এবং দ্বিতীয়টি লাল হওয়ার সম্ভাবনা, $Nq\times Np/N(N-1)=Npq/(N-1)$।

অন্যদিকে, $P(A)=Nq/N=q$ এবং, উপপাদ্য 1 অনুসারে,

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A \text{ ও } B)+P(\bar{A} \text{ ও } B)\\&=Nq\times Np/N(N-1)+Np(Np-1)/N(N-1)\\&=p(Nq+Np-1)/(N-1)=p\end{aligned}$$

তাই

$$P(A \text{ ও } B)\neq P(A)\times P(B)$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে A ও B পরস্পর স্বতন্ত্র নয়।

দুইয়ের অধিক বল নিলেও দেখা যাবে বিভিন্ন নির্বাচনের ফলগুলি পরস্পর স্বতন্ত্র নয়।

উদাহরণ 6. আরো (অন্তত) দু-বছর বেঁচে থাকার সম্ভাবনা একজন পঞ্চাশ বছরের লোকের পক্ষে 0·94, একজন পঞ্চান্ন বছরের লোকের পক্ষে 0·92 এবং একজন ষাট বছরের লোকের পক্ষে 0·89। যদি তিনজন লোকের কথা ভাবা যায়, যাঁদের মধ্যে একজনের বয়স পঞ্চাশ, একজনের পঞ্চান্ন ও অপরজনের ষাট, তবে তাঁদের মধ্যে অন্তত দু-জন দু-বছর পরও বেঁচে থাকবেন এরূপ সম্ভাবনা কত ?

এখানে আমরা ধরে নেব যে, বিভিন্ন লোকের জীবিত থাকা (বা মৃত্যু-মুখে পতিত হওয়া) পরস্পর স্বতন্ত্র ঘটনা— যদিও যুদ্ধ-বিগ্রহ, মহামারী ইত্যাদির ক্ষেত্রে এরূপ মনে করা সংগত হবে না।

তা হলে তিনজনের প্রত্যেকেই বেঁচে থাকবেন এরূপ সম্ভাবনা $\cdot94\times\cdot92\times\cdot89=\cdot769672$; শুধু প্রথম ব্যক্তির মৃত্যু হবে এরূপ সম্ভাবনা $\cdot06\times\cdot92\times\cdot89=\cdot049128$; শুধু দ্বিতীয় ব্যক্তির মৃত্যু হওয়ার সম্ভাবনা $\cdot94\times\cdot08\times\cdot89=\cdot066928$; এবং শুধু তৃতীয় ব্যক্তির মৃত্যু হওয়ার সম্ভাবনা $\cdot94\times\cdot92\times\cdot11=\cdot095128$। সুতরাং নির্ণেয় সম্ভাবনা $\cdot769672+\cdot049128+\cdot066928+\cdot095128$ বা প্রায় 0·98।

সম্ভাব্য চলক ও তার সম্ভাবনা-বিভাজন

সংখ্যাগত লক্ষণ

সম্ভাব্য চলকের আলোচনা সম্ভাবনাতত্ত্বের একটি প্রধান অঙ্গ। কোনো পরীক্ষার ফল বিচার করতে গিয়ে অনেক সময়ই আমরা প্রতিটি ফলের কোনো পরিমাণগত বা সংখ্যাগত লক্ষণ নিয়ে কাজ করি। কারখানায় প্রস্তুত দ্রব্য উৎকৃষ্ট কি নিকৃষ্ট তা দেখার পরিবর্তে আমরা হয়তো দেখি তার ওজন, দৈর্ঘ্য, প্রস্থ বা আয়তন কত। আবার একটি তাসের প্যাকেট থেকে 10টি তাস নেওয়া হলে, তাসগুলির প্রতিটি কি রঙের তা দেখার পরিবর্তে আমরা হয়তো দেখি তাদের ক-টি লাল ও ক-টি কালো। বলা যায় 10টি তাসের মধ্যে লাল তাসের (বা কালো তাসের) সংখ্যায়ই আমরা আগ্রহী। তেমনি, 4টি মুদ্রা একসঙ্গে নিক্ষেপ করা হলে আমরা প্রতি নিক্ষেপণে 'রাজা' এল না 'ফুল' এল তা দেখার পরিবর্তে হয়তো দেখি মোট কতগুলি মুদ্রায় 'রাজা' পাওয়া গেছে। অর্থাৎ এখানে পরীক্ষার ফলগুলির (এদের মোট সংখ্যা $2^4 = 16$) প্রতিটিতে দেখা হবে 'রাজা'-র সংখ্যা কত।

তাই বলা যায় যে, সাধারণত পরীক্ষার ফলগুলি নিজেরা আমাদের কৌতূহলের বিষয় নয়, আমাদের আগ্রহ একটি অপেক্ষক (function)-এ যা প্রতিটি ফলের জন্যে একটি নির্দিষ্ট মান গ্রহণ করে। পরীক্ষার ফল-সমূহের সঙ্গে সম্পৃক্ত এরূপ অপেক্ষককেই আমরা সম্ভাব্য চলক (random variable) বলি। কোনো সম্ভাব্য চলক তার বিভিন্ন মানগুলি কি পরিমাণ সম্ভাবনা-সহ গ্রহণ করে বা কোনো প্রদত্ত মান বা মানসমষ্টির সম্ভাবনা কম কি বেশি, তা আমাদের আলোচনার বিষয় হতে পারে।

বিচ্ছিন্ন চলক ও অবিচ্ছিন্ন চলক

আমরা প্রধানত দুই ধরনের সম্ভাব্য চলক নিয়ে কাজ করি।

প্রথম প্রকারের চলকের বেলায় সম্ভাব্য মানসমূহের সংখ্যা সসীম হবে, নতুবা তাদের সংখ্যা অসীম হলেও তাদের প্রথম মান, দ্বিতীয় মান,··· — এভাবে একটি ক্রম (sequence)-এ সাজানো যাবে। এরূপ কোনো চলক শুধু কতকগুলি পরস্পর বিচ্ছিন্ন মান নিতে পারে, তাই একে আমরা বিচ্ছিন্ন চলক (discrete বা discontinuous variable) বলব। 10টি ছক্কা একসঙ্গে নিক্ষেপ করা হলে প্রাপ্ত মোট বিন্দুসংখ্যা বা 'ছয়'-এর সংখ্যা এ ধরনের চলক। তেমনি পরিবারের লোকসংখ্যা, কারখানায় উৎপাদিত কোনো দ্রব্যে খুঁতের সংখ্যা ইত্যাদিও বিচ্ছিন্ন চলক।

দ্বিতীয় প্রকারের চলক কোনো দুই সীমার মধ্যবর্তী যে-কোনো মান নিতে পারে। এক্ষেত্রে চলকের সম্ভাব্য মানের সংখ্যা অসীম হবে এবং মানগুলিকে একটি ক্রমে বিন্যস্ত করা যাবে না। এরূপ চলককে অবিচ্ছিন্ন চলক (continuous variable) বলা হয়। ব্যক্তির উচ্চতা বা ওজন, কোনো স্থানের তাপাঙ্ক বা আর্দ্রতা, কারখানায় প্রস্তুত দ্রব্যের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ বা ব্যাস ইত্যাদি চলক এই শ্রেণীতে পড়বে।

চলকের সম্ভাবনা-বিভাজন

কোনো সম্ভাব্য চলকের প্রকৃতি আলোচনা করতে হলে, তার মানের পরিবর্তনে সংশ্লিষ্ট সম্ভাবনা কী ভাবে পরিবর্তিত হয় তাই দেখতে হবে। মোট সম্ভাবনা এক-এর ভগ্নাংশগুলি বিভিন্ন মান বা মান-সমষ্টির সঙ্গে যে রীতিতে সংশ্লিষ্ট থাকে, আমরা তাকেই চলকের সম্ভাবনা-বিভাজন (probability distribution) বলি।

সাধারণত কোনো চলককে x, y, z ইত্যাদি অক্ষর দিয়ে সূচিত করা হয়। আর চলকের সম্ভাবনা-বিভাজন প্রকাশ করা হয় চলকটির

কোনো উপযুক্ত অপেক্ষকের মাধ্যমে।

যদি x_n একটি বিচ্ছিন্ন চলক হয়, তবে অপেক্ষকটি ধরা যাক $p(x)$ —x-এর বিভিন্ন মানের সম্ভাবনা কত তা-ই জানাবে। অর্থাৎ x-এর সম্ভাব্য মানগুলি x_1, x_2,··· হলে

$$p(x_i) = P\,[x = x_i]$$

এখানে $i = 1, 2, \cdots$

স্পষ্টতই $p(x)$ এরূপ যে, প্রতি i-এর জন্যে

$$p(x_i) > 0$$

এবং

$$\sum_i p(x_i) = 1$$ [১]

x যদি অবিচ্ছিন্ন চলক হয়, তবে, তার কোনো বিশেষ মানের জন্যে (ধনাত্মক) সম্ভাবনা রয়েছে এরূপ বলা অসংগত হবে। বরং চলকের মান কোনো বিশেষ অন্তরের মধ্যে থাকবে এরূপ সম্ভাবনা কত তা জানতে চাওয়াই অর্থপূর্ণ হবে। এখানে যে অপেক্ষকটির সাহায্যে চলকের সম্ভাবনা-বিভাজন প্রকাশ করা হবে তাকে $f(x)$ বলা যাক। এটির প্রকৃতি এরূপ হবে যে, যে কোনো দুই সংখ্যা a ও b ($a < b$) দেওয়া থাকলে

$$\int_a^b f(x)\,dx = P\,[\,a < x < b\,]$$

অর্থাৎ a থেকে b পর্যন্ত নেওয়া $f(x)$-এর সমাকলক (integral) দ্বারা এই দুই সংখ্যার মধ্যে x-এর থাকার সম্ভাবনা নিরূপিত হবে। এখানে $f(x)$

[১] $p(x_1) + p(x_2) + \cdots$ লেখার পরিবর্তে সংক্ষেপে $\sum_i p(x_i)$ লেখা হয়।

নিম্নের শর্ত দুটি মেনে চলবে :

যদি α ও β চলকের সম্ভাব্য সকল মানের দুই সীমা বোঝায়, তবে

(1) এই দুই সীমার মধ্যবর্তী যে কোনো মান k-র জন্যে

$$f(k) > 0$$

এবং

(2) $$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1$$

f(x)-কে চলকের সম্ভাবনা-ঘনত্ব অপেক্ষক (probability-density function) বলা হয়।

কয়েকটি বিচ্ছিন্ন চলকের সম্ভাবনা-বিভাজন

আমরা কয়েকটি বিশেষ ধরনের সম্ভাবনা-বিভাজন নিয়ে আলোচনা করব। এদের মধ্যে কয়েকটিকে যে পরীক্ষা নিয়ে আমরা কাজ করি তার সঙ্গে সংশ্লিষ্ট চলকের উপযুক্ত বলে গণ্য করা যায়। তবে সাধারণভাবে বলা যায় কোনো বিভাজন ব্যবহার করার সময় তার প্রকৃতির সরলতার দিকেও আমার দৃষ্টি রাখি। প্রাসঙ্গিক চলকের আসল বিভাজনটি হয়তো খুবই জটিল প্রকৃতির। তাই আমরা ঐ বিভাজনের পরিবর্তে অনেক সময় এরূপ একটি বিভাজন ব্যবহার করি যার গাণিতিক চর্চা অপেক্ষাকৃত সহজ হবে।

প্রথমে আমরা বিচ্ছিন্ন চলকের উপযোগী এরূপ কয়েকটি বিভাজনের কথা বলব।

1. একটি সুনির্মিত ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে প্রাপ্ত বিন্দুসংখ্যা যদি আমাদের আলোচ্য চলক হয়, তবে নিম্নের বিভাজনটি তার উপযুক্ত হবে :

চলকের মান k	মানের সম্ভাবনা p (k)
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$
মোট	1

2. এবারে মনে করা যাক N-টি দ্রব্যের মধ্যে Npটি একপ্রকারের ও বাকি Nq-টি অন্যপ্রকারের। হয়তো Np-টি লাল রঙের ও Nq-টি কালো রঙের অথবা Np-টি উৎকৃষ্ট শ্রেণীর ও Nq-টি নিকৃষ্ট শ্রেণীর দ্রব্য। অন্য সকল দিক থেকে দ্রব্যগুলি সম্পূর্ণ সদৃশ এরূপ মনে করা যাক। এই N-টি দ্রব্য থেকে যদি n-টির একটি অংশক নেওয়া হয়, তবে অংশকে প্রথম প্রকার দ্রব্যের সংখ্যা (x) আমাদের আলোচনার বিষয় হতে পারে।

এখন, N-টি দ্রব্য থেকে n-টি নেওয়া যেতে পারে মোট

$$\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n(n-1)\cdots 1}=\binom{N}{n}$$

বিভিন্ন পন্থায়, আর এগুলিকে সমসম্ভাব্য মনে করা যেতে পারে। আবার, এই নির্বাচিত অংশকে x-টি প্রথম প্রকারের দ্রব্য— এবং (n—x)-টি দ্বিতীয় প্রকারের দ্রব্য— থাকবে মোট

$$\frac{Np(Np-1)\cdots(Np-x+1)}{x(x-1)\cdots 1}\times\frac{Nq(Nq-1)\cdots(Nq-n+x+1)}{(n-x)\,(n-x-1)\cdots 1}$$

$$=\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}$$

ক্ষেত্রে।

ফলে, নিম্নের অপেক্ষকটি এখানে x-এর সম্ভাবনা-বিভাজন দেবে :

$$p(x)=\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}\bigg/\binom{N}{n},$$

$$x=0, 1, 2,\cdots, n$$

3. এবারেও ধরা যাক পূর্বোক্ত N-টি দ্রব্যের সমষ্টি থেকে n-টি দ্রব্যের একটি অংশক নেওয়া হয়েছে। কিন্তু ভাবা যাক এবারে n-টি দ্রব্য এক এক করে n বারে নেওয়া হয়েছে এবং যে-কোনো নির্বাচনের আগে পূর্ববর্তী নির্বাচনে লব্ধ দ্রব্য সমষ্টিতে ফিরিয়ে দেওয়া হয়েছে।

এ ক্ষেত্রে কোনো x-টি নির্দিষ্ট নির্বাচনে প্রথম শ্রেণীর দ্রব্য— ও বাকি (n-x)-টিতে দ্বিতীয় শ্রেণীর দ্রব্য— পাওয়ার সম্ভাবনা

$$\underbrace{\frac{Np}{N}\cdot\frac{Np}{N}\cdots\frac{Np}{N}}_{\text{x-টি গুণনীয়ক}}\cdot\quad\underbrace{\frac{Nq}{N}\cdot\frac{Nq}{N}\cdots\frac{Nq}{N}}_{\text{(n-x)-টি গুণনীয়ক}}$$

$$=\left(\frac{Np}{N}\right)^{x}\left(\frac{Nq}{N}\right)^{n-x}=p^{x}q^{n-x}$$

আবার n-সংখ্যক নির্বাচনের যে x-টিতে প্রথম শ্রেণীর দ্রব্য আসবে সেগুলিকে মোট $\binom{n}{x}$ প্রকারে নেওয়া যেতে পারে। অর্থাৎ x-টি প্রথম শ্রেণীর দ্রব্য ও $(n-x)$-টি দ্বিতীয় শ্রেণীর দ্রব্য মোট $\binom{n}{x}$ $=\dfrac{n!}{x!\,(n-x)!}$ -টি বিভিন্ন ক্রমে আসতে পারে। তাই x চলকটি যদি

অংশকে প্রথম শ্রেণীর দ্রব্যের সংখ্যা সূচিত করে, তবে তার সম্ভাবনা-বিভাজন দেবে নিম্নের অপেক্ষকটি :

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x=0, 1, 2, \cdots, n$$

এই বিভাজনটিকে দ্বিপদ বিভাজন (binomial distribution) বলা হয়, কারণ $(q+p)^n$-কে দ্বিপদ নিয়মে সম্প্রসারিত করলেই বিভাজনের বিভিন্ন পদগুলি পাওয়া যাবে। স্পষ্টতই এই বিভাজনটির রূপ N-এর উপর নির্ভরশীল নয়।

n-টি পরস্পর-সদৃশ মুদ্রার নিক্ষেপণে বা একই মুদ্রার n-সংখ্যক নিক্ষেপণে প্রাপ্ত 'রাজা'-র (বা 'ফুল'-এর) সংখ্যার ক্ষেত্রেও এই বিভাজনটি প্রযোজ্য হবে। এর বাস্তবতর উদাহরণ পেতে হলে এমন পরিবারের কথা ভাবা যাক যার সন্তানসংখ্যা n। যদি x চলকটি এরূপ পরিবারে পুত্র-সন্তানের সংখ্যা বোঝায় এবং যদি p কোনো সন্তানের পক্ষে পুত্রসন্তান হওয়ার সম্ভাবনা সূচিত করে, তবে এই x-এর পক্ষেও প্রদত্ত বিভাজনটি প্রাসঙ্গিক হবে।

সাধারণভাবে বলা যায়, যদি কোনো পরীক্ষা n বার সম্পাদন করা যায় এবং প্রতিবারে দুটি বিকল্প ফল থাকে (যথা, ক ও খ), আর যদি ক ও খ-এর সম্ভাবনা প্রতিবারে সমান থাকে এবং nটি ফল পরস্পর স্বতন্ত্র হয়, তবে n বারে প্রথম (বা দ্বিতীয়) প্রকার ফলের মোট সংখ্যা x-এর সম্ভাবনা-বিভাজন দ্বিপদ বিভাজন হবে।

4. দ্বিপদ বিভাজনে n যদি খুব বড়ো সংখ্যা হয়, পক্ষান্তরে p যদি খুব ছোটো সংখ্যা হয়, তবে বিভাজনটি যে রূপ নেয় তাকে পোয়াসঁ বিভাজন (Poisson distribution) বলে। এ ক্ষেত্রে

$$p(x) = e^{-\lambda}\lambda^x/x!, \quad x=0, 1, 2, \cdots$$

$\lambda > 0$ এবং e গণিতে বহুল ব্যবহৃত করণীগত (irrational) রাশি, যার আসন্ন মান 2·71828।

দ্বিপদ বিভাজনে যদি np-র পরিবর্তে λ লেখা যায়, তবে

$$p(x) = \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} p^x q^{n-x}$$

$$= \frac{1}{x!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\lambda^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

তাই যখন $n \to \infty$, $p \to 0$, কিন্তু np অপরিবর্তিত থাকে ($=\lambda$), তখন

$$p(x) \to \frac{1}{x!} \lambda^x e^{-\lambda}$$

অর্থাৎ পোয়াসঁ বিভাজনকে দ্বিপদ বিভাজনের আসন্ন রূপ হিসেবে দেখা যেতে পারে।

পরিবারের সন্তানসংখ্যা, কোনো পুস্তকের পৃষ্ঠায় মুদ্রণ-প্রমাদের সংখ্যা, শহরের রাস্তায় ছুটির দিনে (বা কাজের দিনে) দুর্ঘটনার সংখ্যা ইত্যাদি চলকের বেলায় এই বিভাজনটি উপযুক্ত বলে দেখা গেছে। দ্বিতীয় চলকটির কথাই ধরা যাক। প্রতি পৃষ্ঠায় মুদ্রণ-প্রমাদ ঘটতে পারে এরূপ স্থানের সংখ্যা (অর্থাৎ পৃষ্ঠায় অক্ষর, বিরাম চিহ্ন ইত্যাদির মোট সংখ্যা) মোটামুটি সমান এবং এই সংখ্যাটি বেশ বড়ো হবে। অন্যদিকে কোনো স্থানে মুদ্রণ-প্রমাদ থাকার সম্ভাবনা, যা প্রতি স্থানের জন্যেই সমান বলা যায়, নগণ্য বলা চলে। তাই পোয়াসঁ বিভাজনই এ ক্ষেত্রে প্রাসঙ্গিক বলে মনে হবে।

5. দ্বিপদ বিভাজনের বেলায় আমরা পরীক্ষার পুনঃপুন সম্পাদনের কথা বলেছিলাম। এবারে ধরা যাক আমাদের চলক x, পরীক্ষা সম্পাদনে

k-তম 'ক' পাওয়ার আগে ক-বার 'খ' পাওয়া যায়, তা-ই সূচিত করে। আগের মতোই আমরা ধরে নেব যে, 'ক' (বা 'খ')-এর সম্ভাবনা প্রতিবারে সমান থাকে এবং পরীক্ষার বিভিন্ন সম্পাদনের ফলগুলি পরস্পর স্বতন্ত্র। তা হলে নিম্নের অপেক্ষকটি x-এর সম্ভাবনা বিভাজন দেবে :

$$p(x)=\binom{k+x-1}{x}p^k q^x, \quad x=0, 1, 2, \cdots$$

উদাহরণ হিসেবে বলা যায়, x এখানে কোনো মুদ্রা ছোঁড়া হলে kবার 'রাজা' পাওয়ার আগে ক-বার 'ফুল' পাওয়া যাবে বা কোনো পরিবারের সন্তানদের মধ্যে k জন পুত্রসন্তান হওয়ার আগে কন্যাসন্তানের সংখ্যা কি হবে— ইত্যাদি চলক সূচিত করতে পারে।

এই বিভাজনটিকে পাস্‌কাল বিভাজন (Pascal distribution) বা ঋণাত্মক দ্বিপদ বিভাজন (negative binomial distribution) বলা হয়। পরের নামটি এই কারণে দেওয়া হয়েছে যে, $p^k(1-q)^{-k}$কে দ্বিপদ নিয়মে সম্প্রসারিত করলেই এই বিভাজনের বিভিন্ন পদগুলি পাওয়া যাবে।

কয়েকটি অবিচ্ছিন্ন চলকের সম্ভাবনা-বিভাজন

অবিচ্ছিন্ন চলকের বেলায় সাধারণত যে-সব বিভাজন ব্যবহার করা হয়, তার কয়েকটির কথা এবারে বলা যাক।

1. অবিচ্ছিন্ন চলকের উপযোগী সরলতম বিভাজনের ক্ষেত্রে সম্ভাবনাঘনত্ব দুই নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে (বলা যাক α ও β-র মধ্যে) যে কোনো বিন্দুতে সমান হবে। অর্থাৎ এখানে x-এর সম্ভাবনা-ঘনত্ব অপেক্ষক

$$f(x)=1/(\beta-\alpha), \quad \alpha<x<\beta$$

এ ক্ষেত্রে যে কোনো দুই রাশি a ও b ($a\geqslant\alpha, b\leqslant\beta$) দেওয়া থাকলে,

$$P[a<x<b]=(b-a)/(\beta-\alpha)$$ ।

ধরুন একটি সরল রেখার উপর দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু A ও B দেওয়া আছে এবং A ও B-র মাঝখানে একটি বিন্দু X বেছে নেওয়া হয়েছে। যদি মূল বিন্দু (origin) থেকে A, B ও X-এর দূরত্ব যথাক্রমে α, β ও x হয়, তবে x চলকটির জন্যে উপরের বিভাজনটি উপযুক্ত হবে। অনুরূপ-ভাবে মনে করা যাক একটি বাস-স্টপে দশ মিনিট অন্তর বাস আসে। ধরা যাক কোনো যাত্রী (বাসের সময়সূচী সম্পর্কে যাঁর কাছে কোনো তথ্য নেই) বাস স্টপে এলে তাঁকে x মিনিট অপেক্ষা করতে হয়। তা হলে এই x-এর সম্ভাবনা-বিভাজনও এ ধরনের আয়তাকার বিভাজন (rectangular distribution) হবে। আর এ ক্ষেত্রে সম্ভাবনা-ঘনত্ব অপেক্ষক হবে

$$f(x)=\tfrac{1}{10}, \quad 0<x<10$$ ।

2. অন্য একটি সহজ প্রকৃতির কিন্তু বহুল-ব্যবহৃত সম্ভাবনা বিভাজনের বেলায়

$$f(x)=\theta e^{\theta(\nu-x)}, \quad \nu\leqslant x<\infty$$

এখানে $\theta>0$ ।

চলকের মান ν হলে এই বিভাজনের সম্ভাবনা-ঘনত্ব বৃহত্তম হবে, আর মান ν থেকে যতই বাড়বে সম্ভাবনা-ঘনত্ব ততই কমবে। যে-সব ক্ষেত্রে ইলেকট্রিক বাল্‌ব্, ব্যাটারি ইত্যাদি দ্রব্যের 'আয়ু' (life) আমাদের আলোচ্য চলক, সেখানে এই বিভাজনটি উপযুক্ত বলে দেখা গেছে।

3. কিন্তু অবিচ্ছিন্ন চলকের জন্যে সর্বাধিক ব্যবহৃত সম্ভাবনা বিভাজন হল সুষম বিভাজন (normal distribution)। এর সম্ভাবনা-ঘনত্ব অপেক্ষক

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

এখানে σ একটি ধনাত্মক রাশি। e-র ন্যায় π-ও একটি করণীগত রাশি এবং এর আসন্ন মান 3·14159।

এই বিভাজনটির প্রধান বৈশিষ্ট্য হল μ-এর দু দিকে এর প্রতিসাম্য (symmetry)। $x = \mu$ হলে সম্ভাবনা-ঘনত্ব বৃহত্তম হবে এবং x যতই μ থেকে দূরে যাবে (তা দক্ষিণেই হোক কি বামেই হোক) সম্ভাবনা-ঘনত্ব ততই হ্রাস পাবে।

কোনো শ্রেণীর প্রাণী বা উদ্ভিদের দৈর্ঘ্য, ওজন ইত্যাদি বা কারখানায় প্রস্তুত দ্রব্যের দৈর্ঘ্য, ওজন, ব্যাস, ভাঙন শক্তি (breaking strength) ইত্যাদি অবিচ্ছিন্ন চলকের বেলায় এই বিভাজনটির ব্যবহার সুসংগত হয় বলে দেখা গেছে।

আবার, কোনো দ্বিপদ বিভাজনের ক্ষেত্রে n যদি যথেষ্ট বড়ো হয় এবং p যদি $\frac{1}{2}$-এর কাছাকাছি থাকে অথবা কোনো পোয়াসঁ বিভাজনের ক্ষেত্রে λ যদি যথেষ্ট বড়ো হয়, তবে তার পরিবর্তে সুষম বিভাজন ব্যবহার করা যেতে পারে। এর ফলে বিভাজন-সংক্রান্ত গাণিতিক কাজকর্ম অনেক সহজতর হবে, আর এই পরিবর্তনে যে ভ্রান্তি সঞ্চারিত হবে তাও অত্যল্প হবে।

দুই বা ততোধিক চলকের যুগ্ম বিভাজন

কোনো কোনো ক্ষেত্রে একটি মাত্র চলকের পরিবর্তে একাধিক চলক আমাদের আলোচনার বিষয় হতে পারে। এ সব ক্ষেত্রে পরীক্ষার প্রতিটি ফলের জন্যে একই সঙ্গে ঐ একাধিক চলকের মান লক্ষ্য করা হবে। যেমন, দুটি ছক্কা ছোঁড়া হলে আমরা হয়তো একই সঙ্গে মোট প্রাপ্ত বিন্দুসংখ্যা এবং দুটি বিন্দুসংখ্যার মধ্যে বৃহত্তর সংখ্যা লক্ষ্য করব।

আবার, কোনো কারখানায় প্রস্তুত মোটর গাড়ির চাকার জন্যে হয়তো একই সঙ্গে ওজন, ব্যাস ও বেধ নির্ণয় করা হবে। তেমনি কোনো শহরের বেলায় প্রতি পরিবারের জন্যে লোকসংখ্যা, মাসিক আয় ও মাসিক ব্যয় একই সঙ্গে নির্ণীত হতে পারে।

একাধিক চলক একত্রে নেওয়ার উদ্দেশ্য হল তাদের পারস্পরিক সম্পর্কের অনুধাবন। এই আলোচনা করা হয় চলকগুলির যুগ্ম সম্ভাবনা-বিভাজন (joint probability distribution)-এর ভিত্তিতে। আমরা দুটি চলক নিয়েই এতৎসংক্রান্ত বিভিন্ন ধারণার বর্ণনা দেব। তবে এটা বলা যায় যে, চলকের সংখ্যা দুয়ের বেশি হলেও অনুরূপ আলোচনা প্রাসঙ্গিক হবে।

প্রথমে মনে করা যাক x ও y দুটি বিচ্ছিন্ন চলক। এদের যুগ্ম বিভাজন চলক দুটি তাদের সম্ভাব্য প্রতি জোড়া মান কি কি সম্ভাবনা-সহ গ্রহণ করে তারই ধারণা দেবে। এই যুগ্ম বিভাজন একটি অপেক্ষকের সাহায্যে— বলা যাক $p(x, y)$-এর সাহায্যে— প্রকাশ করা যাবে। যদি $x_1, x_2, \cdots$ ও $y_1, y_2, \cdots$ যথাক্রমে x ও y-এর সম্ভাব্য সকল মান হয়, তবে $p(x, y)$ এরূপ যে,

$$p(x_i, y_j) = P[x = x_i, y = y_j]$$

অর্থাৎ $p(x_i, y_j)$ হল x ও y-এর পক্ষে একই সঙ্গে যথাক্রমে x_i ও y_j এই মান দুটি গ্রহণ করার সম্ভাবনা। স্পষ্টতই

$$p(x_i, y_j) \geqslant 0$$

এবং

$$\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) = 1$$

আবার, x ও y যদি প্রত্যেকে অবিচ্ছিন্ন চলক হয়, তবে তাদের যুগ্ম বিভাজন চলক দুটির মান সম্ভাব্য যে কোনো দুটি অন্তরে একই সঙ্গে থাকার সম্ভাবনা কত, তারই নির্দেশ দেবে। এখানেও যুগ্ম বিভাজনটিকে একটি অপেক্ষকের সাহায্যে প্রকাশ করা যাবে। এই অপেক্ষককে আমরা

চলক দুটির যুগ্ম সম্ভাবনা-ঘনত্ব অপেক্ষক (joint probability-density function) বলব এবং $f(x, y)$ এই প্রতীকের সাহায্যে সূচিত করব।

এখানে ধরা যাক α ও β হল x-এর সম্ভাব্য সকল মানের দুই সীমা এবং γ ও δ তেমনি y-এর সম্ভাব্য সকল মানের দুই সীমা। তা হলে

$$f(x, y) \geqslant 0 \text{ যদি } \alpha < x < \beta \text{ এবং } \gamma < y < \delta \text{ হয়,}$$

এবং
$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

বিচ্ছিন্ন চলকের ক্ষেত্রে x-এর কোনো নির্দিষ্ট মানের জন্যে, যথা x_i-এর জন্যে, y-এর সকল মানের উপর $p(x, y)$-এর সমষ্টিকে $q(x_i)$ বলা যাক। অর্থাৎ

$$q(x_i) = \sum_j p(x_i, y_j)$$

এভাবে $p(x, y)$ থেকে যে নূতন অপেক্ষক $q(x)$ পাওয়া গেল, তা শুধু x-এর সম্ভাবনা-বিভাজন দেবে। তেমনি, যদি

$$r(y_j) = \sum_i p(x_i, y_j)$$

হয়, তবে $r(y)$ শুধু y-এর সম্ভাবনা-বিভাজন দেবে।

অনুরূপভাবে, অবিচ্ছিন্ন চলকের ক্ষেত্রে

$$g(x) = \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y)\, dy$$

ও

$$h(y) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)\, dx$$

এই অপেক্ষক দুটি যথাক্রমে x ও y-এর সম্ভাবনা-বিভাজন দেবে।

কোনো যুগ্ম বিভাজন যদি এমন হয় যে, চলক দুটির সকল মানের জন্যে

$$p(x, y) = q(x)\, r(y)$$

বা

$$f(x, y)=g(x)\ h(y)$$

তা হলে চলক দুটিকে পরস্পর স্বতন্ত্র (mutually independent) বলা হবে। অর্থাৎ x ও y বিচ্ছিন্ন চলক হলে, তাদের তখনই পরস্পর স্বতন্ত্র বলা হবে যখন x-এর পক্ষে কোনো নির্দিষ্ট মান গ্রহণ ও y-এর পক্ষে কোনো নির্দিষ্ট মান গ্রহণ পরস্পর-স্বতন্ত্র ঘটনা। তেমনি, x ও y যদি অবিচ্ছিন্ন চলক হয়, তবে তাদের পরস্পর স্বতন্ত্র তখনই বলা হবে যখন x-এর পক্ষে কোনো নির্দিষ্ট অন্তরের মধ্যবর্তী মান গ্রহণ ও y-এর পক্ষে কোনো নির্দিষ্ট অন্তরের মধ্যবর্তী মান গ্রহণ পরস্পর-স্বতন্ত্র ঘটনা।

x ও y পরস্পর স্বতন্ত্র না হলে তাদের পরস্পর নির্ভরশীল (associated) বলা হবে।

একটি বাক্সে তিন রঙের, কিন্তু অন্য সকল দিক থেকে সম্পূর্ণ সদৃশ, ৪টি বল রয়েছে। এর মধ্যে 2টি লাল, 3টি সাদা ও 3টি কালো। এবারে বাক্স থেকে চোখ বুজে 3টি বল নেওয়া হলে, অংশকে লাল বলের সংখ্যা (বলা যাক x) ও সাদা বলের সংখ্যা (বলা যাক y) দুই-ই সম্ভাব্য চলক। এদের যুগ্ম সম্ভাবনা-বিভাজন নীচের ছকে দেখানো হল। এখানে x ও y-এর প্রতি জোড়া মানের সম্ভাবনা ছকের সংশ্লিষ্ট কক্ষে দেওয়া হয়েছে :

		x-এর মান			মোট
		0	1	2	
y-এর মান	0	1/56	6/56	3/56	10/56
	1	9/56	18/56	3/56	30/56
	2	9/56	6/56	0	15/56
	3	1/56	0	0	1/56
মোট		20/56	30/56	6/56	1

সহজেই দেখা যাবে যে, এক্ষেত্রে x ও y পরস্পর নির্ভরশীল চলক—পরস্পর স্বতন্ত্র নয়।

পরিবর্তনশীল সম্ভাবনা-বিভাজন

অনেক ক্ষেত্রে আমরা এক বা ততোধিক চলকের যে সম্ভাবনা-বিভাজনের কথা চিন্তা করি, তার প্রকৃতি স্থানকাল ভেদে পরিবর্তিত হতে পারে। কোনো দেশের জনসমষ্টির কথাই বলা যেতে পারে। আমাদের অভিজ্ঞতা থেকে দেখা যায় জনসমষ্টিতে বিভিন্ন বয়সের লোকদের আনুপাতিক পরিসংখ্যা এক বছর থেকে অন্য বছরে পরিবর্তিত হয়। বস্তুত, আধুনিক কালে অনেক দেশেই দেখা যায় জনসমষ্টিতে অপেক্ষাকৃত বেশি বয়সের লোকদের অনুপাত ক্রমশ বৃদ্ধি পাচ্ছে। এই ব্যাপারটিকে 'জনসমষ্টির বয়োবৃদ্ধি' (ageing of the population) বলা যেতে পারে।

সম্ভাবনা-বিভাজনের এরূপ পরিবর্তনের চর্চা ও বিশ্লেষণ করার উদ্দেশ্যে সম্ভাবনাতত্ত্বের একটি বিশেষ শাখা গড়ে তোলা হয়েছে। এর নাম দেওয়া যায় সম্ভাবনাত্মক প্রবাহের বা পরিবর্তনশীল সত্তার তত্ত্ব (theory of stochastic processes)।

আমরা এখানে একটি অপেক্ষাকৃত সরল কিন্তু বহুল ব্যবহৃত কাঠামোয় এরূপ পরিবর্তনের আলোচনা করব। দেখা যাবে এ আলোচনার ফলশ্রুতি হিসাবে পোয়াসঁ বিভাজনের একটি বিকল্প ব্যুৎপত্তি পাওয়া যাবে।

কোনো একটি ঘটনার সংঘটনের কথা ভাবা যাক, যে ঘটনাটি প্রতি মুহূর্তে (বা কোনো স্থানের প্রতি বিন্দুতে) ঘটতে পারে। আমরা যদি $x(t)$ দিয়ে t দৈর্ঘ্যের কোনো অন্তরে ঘটনাটি কতবার ঘটছে তা-ই বোঝাই, তবে $x(t)$-র সম্ভাবনা-বিভাজন কী হবে দেখা যেতে পারে। $x(t)$ কোনো দোকানে t ঘণ্টার মধ্যে আগত ক্রেতার সংখ্যা, কোনো বিমান বন্দরে

t ঘণ্টার মধ্যে আগমনকারী বিমানের সংখ্যা ইত্যাদি বোঝাতে পারে।

x (t)-র সম্ভাবনা-বিভাজন নির্ণয় করতে গিয়ে আমরা ধরে নেব যে, এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা μ আছে এবং এমন একটি যথেষ্ট ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা h আছে যে, h দৈর্ঘ্যের কোনো অন্তর দেওয়া থাকলে, ঐ অন্তরে

1. ঘটনাটি একবার ঘটবে এমন সম্ভাবনার আসন্ন মান μh,

2. ঘটনাটি একবারও ঘটবে না এমন সম্ভাবনার আসন্ন মান $1-\mu h$, এবং 3. ঘটনাটি দুই বা ততোধিক বার ঘটবে এমন সম্ভাবনার আসন্ন মান 0। আমরা এ-ও ধরে নেব যে, যে কোনো অন্তরকে nটি ক্ষুদ্রতর অন্তরে ভাগ করলে, যদি $A_1, A_2, \cdots, A_n$ যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়,···, n-তম অন্তরে ঐ ঘটনা অন্তত একবার ঘটে এরূপ বোঝায়, তবে $A_1, A_2, \cdots, A_n$ পরস্পর স্বতন্ত্র হবে।

এবারে প্রদত্ত অন্তর t-কে n-টি সমান অংশে ভাগ করা যাক। প্রতি অংশের দৈর্ঘ্য হবে $h=t/n$। তা হলে ঐ অন্তরে ঘটনাটি kবার ঘটবে এমন সম্ভাবনার আসন্ন মান আর nটি ক্ষুদ্র অন্তরের ঠিক k-টিতে ঘটনাটি একবার করে ঘটবে এমন সম্ভাবনার আসন্ন মান সমান হবে। উপরের শর্তানুসারে এই আসন্ন মান (দ্বিপদ বিভাজন অনুযায়ী)

$$\binom{n}{k}\left(\frac{\mu t}{n}\right)^k\left(1-\frac{\mu t}{n}\right)^{n-k}=\frac{1}{k!}\times\frac{n(n-1)\cdots 1}{n^k}\times(\mu t)^k\times\left(1-\frac{\mu t}{n}\right)^{n-k}$$

সম্ভাবনার সঠিক মান পেতে হলে ক্ষুদ্র অন্তরের সংখ্যা n যথেচ্ছ বাড়াতে হবে কিন্তু তা হলে সম্ভাবনার মান দাঁড়াবে

$$\frac{1}{k!}(\mu t)^k e^{-\mu t}$$

তাই t-এর কোনো নির্দিষ্ট মানের জন্যে $x(t)$-র সম্ভাবনা-বিভাজন পোয়াসঁ বিভাজন হবে এবং এর প্রত্যাশিত মান হবে μt। আর t-র পরিবর্তনে সম্ভাবনা-বিভাজন পোয়াসঁ বিভাজনই থাকবে। শুধু তার প্রত্যাশিত মান μt পরিবর্তিত হবে।

যে সকল প্রবাহে $x(t)$-র সম্ভাবনা-বিভাজন এ ধরনের হয়, তাদের পোয়াসঁ প্রবাহ (Poisson processes) নাম দেওয়া হয়েছে।

প্রত্যাশিত মান, সমক পার্থক্য ও সহগতি সহগ

চলকের প্রত্যাশিত মান

কোনো সম্ভাবনা-বিভাজনের বর্ণনা দিতে গিয়ে, বা একাধিক বিভাজনের তুলনা করার জন্যে, সাধারণত অল্প কয়েকটি পরিমাপের সাহায্য নেওয়া হয়। এর মধ্যে সরলতম ও অধিকতম ব্যবহৃত পরিমাপ হল চলকের প্রত্যাশিত মান (expected value)।

1. বিচ্ছিন্ন চলক : প্রথমে মনে করা যাক x চলকের সম্ভাব্য মান-গুলির সংখ্যা সসীম। মনে করা যাক এই মানগুলি $x_1, x_2, \cdots, x_k$ এবং এদের সম্ভাবনা যথাক্রমে $p(x_1), p(x_2), \cdots, p(x_k)$। এক্ষেত্রে x-এর প্রত্যাশিত মান

$$E(x) = \sum_i x_i \times p(x_i)$$

$$= x_1 \times p(x_1) + x_2 \times p(x_2) + \cdots + x_k \times p(x_k)$$

তাই এরূপ চলকের প্রত্যাশিত মান নিরূপণ করতে হলে তার প্রতি মানকে সংশ্লিষ্ট সম্ভাবনা দিয়ে গুণ করতে হবে। এই গুণফলগুলির সমষ্টিই চলকের প্রত্যাশিত মান।

কিন্তু বিচ্ছিন্ন চলকের সকল সম্ভাব্য মানের সংখ্যা অসীমও হতে পারে। অবশ্য এক্ষেত্রে মানগুলিকে প্রথম, দ্বিতীয়,…এভাবে একটি ক্রমে সাজানো যাবে। ধরা যাক এভাবে সাজানোর পর মানগুলিকে $x_1, x_2,$ …এবং তাদের সম্ভাবনাকে যথাক্রমে $p(x_1), p(x_2), \cdots$ দিয়ে সূচিত করা হল। তা হলে আগের মতোই $\sum_i x_i \times p(x_i) = x_1 \times p(x_1) + x_2 \times p(x_2)$ $+ \cdots$ এই যোগফলকে x-এর প্রত্যাশিত মান হিসেবে নেওয়া স্বাভাবিক মনে হবে। কিন্তু অসুবিধে হল এই যে, এই মানগুলিকে অন্ত

কোনো ভাবে সাজালে যোগফলটি ভিন্ন মান নিতে পারে। সেক্ষেত্রে এইটিকে সম্ভাবনা বিভাজনের বৈশিষ্ট্য বলা সঙ্গত হবে না। এরূপ ক্ষেত্রে আমরা বলি যে, প্রত্যাশিত মানের অস্তিত্ব নেই। সুতরাং প্রত্যাশিত মান তখনই অর্থবহ যখন এই যোগফল মানগুলির বিন্যাসের উপর নির্ভরশীল নয়, অর্থাৎ যখন

$$\sum_{i} |x_i| \times p(x_i) < \infty$$

এবং এক্ষেত্রে প্রত্যাশিত মান

$$E(x) = \sum_{i} x_i \times p(x_i)$$

উদাহরণ 1. দুই ব্যক্তি ক ও খ বাজি ধরে খেলছে। খেলার শর্ত হল এই যে, একটি নিখুঁত মুদ্রা নিক্ষেপ করা হবে এবং 'রাজা' পাওয়া গেলে ক জিতবে আর 'ফুল' পাওয়া গেলে খ জিতবে; প্রথম ক্ষেত্রে ক তার প্রতিদ্বন্দ্বী খ-র কাছ থেকে a টাকা পাবে এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে খ তার প্রতিদ্বন্দ্বী ক-র কাছ থেকে b টাকা পাবে।

তা হলে ক-র লাভের (বা খ-র ক্ষতির) সম্ভাব্য দুই মান a ও $-b$ এবং এদের প্রতিটির সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$। সুতরাং ক-র লাভের প্রত্যাশিত মান

$$E(x) = a \times \tfrac{1}{2} + (-b) \times \tfrac{1}{2}$$
$$= (a-b)/2$$

উদাহরণ 2. পঞ্চম অধ্যায়ে আমরা একটি নিখুঁত ছক্কা নিক্ষেপণে প্রাপ্ত বিন্দুসংখ্যার সম্ভাবনা-বিভাজন কী হবে দেখেছি। এই বিন্দুসংখ্যার সম্ভাব্য মান 1, 2,⋯,6 এবং প্রতি মানের সম্ভাবনা $\frac{1}{6}$। সুতরাং এর প্রত্যাশিত মান

$$E(x) = 1 \times \tfrac{1}{6} + 2 \times \tfrac{1}{6} + \cdots + 6 \times \tfrac{1}{6}$$
$$= \tfrac{1}{6} \times (1 + 2 + \cdots + 6) = \tfrac{1}{6} \times \tfrac{6 \times 7}{2}$$
$$= \tfrac{7}{2} \text{ বা } 3{\cdot}5$$

উদাহরণ 3. পঞ্চম অধ্যায়ে আমরা পোয়াসঁ-বিভাজনের কথা বলেছিলাম। এই বিভাজনের ক্ষেত্রে চলকের সম্ভাব্য মান 0, 1, 2,··· এবং তাদের সম্ভাবনা যথাক্রমে $e^{-\lambda}$, $e^{-\lambda}\lambda/1!$, $e^{-\lambda}\lambda^2/2!\cdots$। সুতরাং চলকটির প্রত্যাশিত মান

$$E(x)=0\times e^{-\lambda}+1\times\frac{e^{-\lambda}\lambda}{1!}+2\times\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}+\cdots$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\left[1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\cdots\right]$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\times e^{\lambda}=\lambda$$

2. অবিচ্ছিন্ন চলক : x অবিচ্ছিন্ন চলক হলে, মনে করা যাক α ও β চলকের সম্ভাব্য সকল মানের দুই সীমা এবং $f(x)$ হল চলকের সম্ভাবনা-ঘনত্ব অপেক্ষক। এখন, α ও β-র মধ্যবর্তী মানগুলিকে k-টি অন্তরে ভাগ করা যাক; যথা, $\alpha\leqslant x<x_1$, $x_1\leqslant x<x_2,\cdots$, $x_{k-1}\leqslant x<\beta$। এখানে x_{i-1} ও x_i হল i-তম অন্তরের দুই সীমা ($x_0=\alpha$, $x_k=\beta$)। এবারে i-তম অন্তরের মধ্যবর্তী কোনো মান a_i নেওয়া যাক; অন্তরের দৈর্ঘ্য c_i যথেষ্ট ক্ষুদ্র হলে x-এর পক্ষে এই অন্তরে থাকার সম্ভাবনা প্রায় $f(a_i)\times c_i$। x-এর প্রত্যাশিত মানের কথা উঠলে

$$\sum_i a_i\times f(a_i)\times c_i$$

—এই যোগফলটির কথা স্বতই মনে হবে। কিন্তু স্মরণ রাখতে হবে যে, এখানে আমরা অবিচ্ছিন্ন চলক নিয়ে কাজ করছি। তাই অসীম-সংখ্যক এবং ক্রমক্ষুদ্রাকৃতি অন্তরের ক্ষেত্রে এই যোগফলের কোনো সীমা আছে কি না দেখতে হবে। সীমা থাকলে তাকে $\int_\alpha^\beta x\, f(x)\, dx$ এই সমাকলক দিয়ে সূচিত করা হয় এবং আমরা বলি এক্ষেত্রে

$$E(x)=\int_{\alpha}^{\beta} x\, f(x)\, dx$$

কিন্তু অসীমসংখ্যক মান বিশিষ্ট বিচ্ছিন্ন চলকের বেলায় যেমন বলা হয়েছে, তেমনি এখানেও আমরা বলি প্রত্যাশিত মান $E(x)$ শুধু তখনই অর্থবহ হবে যখন

$$\int_{\alpha}^{\beta} |x|\, f(x)\, dx < \infty$$

উদাহরণ 4. পঞ্চম অধ্যায়ে আলোচিত একটি সরল বিভাজনের জন্যে সম্ভাবনা-ঘনত্ব অপেক্ষক

$$f(x)=1/(\beta-\alpha), \quad \alpha<x<\beta$$

এক্ষেত্রে প্রত্যাশিত মান অর্থবহ এবং

$$E(x)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{x}{\beta-\alpha}\, dx$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} x\, dx$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\beta^2-\alpha^2}{2} = \frac{\beta+\alpha}{2}$$

অর্থাৎ α থেকে β পর্যন্ত প্রসারিত অন্তরের মধ্যবিন্দুই চলকের প্রত্যাশিত মান।

উদাহরণ 5. অবিচ্ছিন্ন চলকের সম্ভাবনা-বিভাজন সুষম ধরনের হলে, মনে করা যাক তার সম্ভাবনা-ঘনত্ব অপেক্ষক

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

এখানেও প্রত্যাশিত মান অর্থবহ। যেহেতু

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)\ f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)\ e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}dx$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ye^{-y^2/2}dy\left[y=\frac{x-\mu}{\sigma}\text{ বসালে }\right]$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(-e^{-y^2/2}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$=0$$

তাই

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\ f(x)\ dx=\mu\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\ dx$$

$$=\mu$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে

$$E(x)=\mu$$

প্রত্যাশিত মানের তাৎপর্য

প্রথমে মনে করা যাক x চলকটি সসীম-সংখ্যক মানবিশিষ্ট বিচ্ছিন্ন চলক এবং তার সম্ভাব্য মান $x_1, x_2, \cdots, x_k$ ও সংশ্লিষ্ট সম্ভাবনা যথাক্রমে $p(x_1), p(x_2), \cdots, p(x_k)$। আমাদের পরীক্ষা n বার সংঘটিত হলে, যদি $x_1, x_2, \cdots, x_k$-এর পরিসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, \cdots, f_k$ হয়, তবে x-এর গড়মান (average) বলতে আমরা বুঝি

$$\bar{x}=(x_1\times f_1+x_2\times f_2+\cdots+x_k\times f_k)/n$$
$$=x_1\times\frac{f_1}{n}+x_2\times\frac{f_2}{n}+\cdots+x_k\times\frac{f_k}{n}$$

কিন্তু আমাদের আলোচনার ধারানুসারে, n ক্রমশ বড়ো হলে $\frac{f_1}{n}$ একটি ধ্রুব মানের নিকটবর্তী হয় এবং এই ধ্রুবমানটিকেই $p(x_1)=P[x=x_1]$ বলা হয়েছে ; তেমনি $\frac{f_2}{n}$ একটি ধ্রুবমানের নিকটবর্তী হয় এবং এটি হচ্ছে $P(x_2)=P[x=x_2]$; ইত্যাদি। তাই n বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে $\bar{x}$-ও একটি ধ্রুবমানের কাছাকাছি আসে, এরূপ ভাবা যেতে পারে। আর এই ধ্রুব মানটিই হল

$$x_1\times p(x_1)+x_2\times p(x_2)+\cdots+x_k\times p(x_k)$$

অর্থাৎ x-এর প্রত্যাশিত মান E(x)।

সুতরাং কোনো ঘটনার সম্ভাবনাকে যেমন দেখা হয়েছে (পরীক্ষার পুনঃপুন অনুষ্ঠানে) তার আনুপাতিক পরিসংখ্যার চূড়ান্ত রূপ (long-run relative frequency) হিসেবে, তেমনি চলকের প্রত্যাশিত মানকে তার গড় মানের চূড়ান্ত রূপ (long-run average) হিসেবে দেখা যেতে পারে।

প্রত্যাশিত মানের সংজ্ঞাটিকে আমরা সসীম-সংখ্যক মানবিশিষ্ট বিচ্ছিন্ন চলকের ক্ষেত্র থেকে কেমন করে অসীম-সংখ্যক মান-বিশিষ্ট বিচ্ছিন্ন চলকের ক্ষেত্রে এবং তার পর অবিচ্ছিন্ন চলকের ক্ষেত্রে সম্প্রসারিত করেছি, তা মনে রাখলে দেখা যাবে প্রত্যাশিত মানকে পরের দুই ক্ষেত্রেও অনুরূপ দৃষ্টিভঙ্গী থেকে ব্যাখ্যা করা যেতে পারে।

উদাহরণ 1-এর কথাই বিবেচনা করা যাক। এখানে ক কোনো কোনো ক্ষেত্রে জিতবে এবং তখন তার লাভ হবে a টাকা হিসেবে।

আবার ক্ষেত্রবিশেষে ক হারবে এবং তখন তার ক্ষতি হবে b টাকা হিসেবে। কিন্তু ক যদি বার বার খ-এর সঙ্গে বাজি রেখে খেলে, তবে পরিণামে তার লাভ[১] হবে খেলা-প্রতি গড়ে (a—b)/2 টাকা হিসেবে। অন্যভাবে বলা যায়, কোনো একটি খেলা থেকে তার a টাকা লাভ হতে পারে বা b টাকা লোকসান হতে পারে; কিন্তু খেলার ফল জানার পূর্ব পর্যন্ত সে 'প্রত্যাশা' করতে পারে যে, তার (a—b)/2 টাকা লাভ হবে।

চলকের বিস্তৃতি ও সমক পার্থক্য

প্রত্যাশিত মান থেকে চলকের সম্ভাবনা-বিভাজন সম্বন্ধে মোটামুটি ধারণা পাওয়া যাবে। কিন্তু এই মান শুধু বিভাজনের অবস্থান সম্বন্ধেই আমাদের ধারণা দিতে পারে, অর্থাৎ কোন্ মানকে চলকের প্রতিনিধি-স্থানীয় মান (representative value) বলা যেতে পারে তারই আভাস পাওয়া যাবে এ থেকে। তবে সকল ক্ষেত্রে তো আর প্রত্যাশিত মান চলকের একমাত্র সম্ভাব্য মান হবে না। সাধারণত একাধিক সম্ভাব্য মান থাকবে; কোনো ক্ষেত্রে সম্ভাব্য মানগুলি সাধারণভাবে প্রত্যাশিত মানের কাছাকাছি থাকবে, কোনো ক্ষেত্রে আবার সেগুলি সাধারণভাবে প্রত্যাশিত মান থেকে দূরে থাকবে। অর্থাৎ কোনো ক্ষেত্রে চলকের পক্ষে প্রত্যাশিত মানের নিকটে থাকার সম্ভাবনা বেশি হবে এবং অন্য ক্ষেত্রে ঐ মান থেকে দূরে থাকার সম্ভাবনাই বেশি হবে। অন্যভাবে বলা যায়, প্রথম ক্ষেত্রে চলকের (বা বিভাজনের) বিস্তৃতি (dispersion) দ্বিতীয় ক্ষেত্রের তুলনায় স্বল্প হবে।

প্রত্যাশিত মান উল্লেখ করার সঙ্গে সঙ্গে চলকের বিস্তৃতি সম্বন্ধেও

---

১ এটি ঋণাত্মক সংখ্যা হলে, (b—a)/2-কে খেলা প্রতি গড়ে ক-র ক্ষতি হিসেবে দেখতে হবে।

সম্যক ধারণা দেওয়া সমীচীন। সাধারণত বিস্তৃতির যে পরিমাপ ব্যবহার করা হয় তার নাম সমক পার্থক্য (standard deviation)।

মনে করা যাক x চলকের প্রত্যাশিত মান μ। তা হলে $x-\mu$ এই অন্তরটিকে প্রত্যাশিত মান থেকে চলকের পার্থক্য বা ব্যত্যয় (deviation) বলা যায়। আবার, বিস্তৃতি পরিমাপণে আমরা এই ব্যত্যয়ের পরিমাণ (magnitude)-এই আগ্রহী, এর চিহ্ন (sign)-এ নয়। চিহ্ন বর্জন করতে গিয়ে $(x-\mu)$-এর পরিবর্তে আমরা $(x-\mu)^2$-এর ব্যবহার করি। $(x-\mu)^2$-এর প্রত্যাশিত মান যদি অর্থবহ হয়, তবে সেই প্রত্যাশিত মানের ধন বর্গমূল (positive square root)-কে বিস্তৃতির পরিমাপ হিসেবে গ্রহণ করা যেতে পারে। আর এই বর্গমূলকেই সমক পার্থক্য বলা হয় এবং একে গ্রীক অক্ষর σ দিয়ে সূচিত করা হয়। অর্থাৎ

$$\sigma=\sqrt{E(x-\mu)^2}$$

উদাহরণ 6. উদাহরণ 1-এ বিবৃত খেলায় A-র লাভের (বা B-র ক্ষতির) কথা মনে করা যাক। এখানে $\mu=\dfrac{a-b}{2}$ এবং x-এর সম্ভাব্য দুই মান a ও $-b$। সুতরাং $(x-\mu)^2$-এর সম্ভাব্য মান দুই ক্ষেত্রে

$$\left(a-\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{4}$$

ও

$$\left(-b-\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{4}$$

এবং প্রতিক্ষেত্রেই সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$। তাই

$$\sigma^2=E(x-\mu)^2$$

$$=\frac{(a+b)^2}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{(a+b)^2}{4}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{(a+b)^2}{4}$$

অর্থাৎ

$$\sigma=\frac{a+b}{2}$$

উদাহরণ 7. একটি সুনির্মিত ছক্কার নিক্ষেপণে প্রাপ্ত বিন্দুসংখ্যা যদি আমাদের আলোচ্য চলক হয়, তবে উদাহরণ 2 অনুসারে $\mu=\frac{7}{2}$। এখানে x-এর সম্ভাব্য বিভিন্ন মানের জন্যে সংশ্লিষ্ট $(x-\mu)^2$-এর মান ও তাদের সম্ভাবনা কী হবে, তা নিম্নের ছকে দেখানো হল :

x	$(x-\mu)^2$	সম্ভাবনা
1	$\frac{25}{4}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{25}{4}$	$\frac{1}{6}$
মোট	—	1

এই ছক থেকে বলা যাচ্ছে যে,

$$\sigma^2=[2\times\tfrac{25}{4}+2\times\tfrac{9}{4}+2\times\tfrac{1}{4}]\times\tfrac{1}{6}$$
$$=\tfrac{35}{2}\times\tfrac{1}{6}=2{\cdot}9167$$

সুতরাং

$$\sigma=1{\cdot}71$$

উদাহরণ 8. এবারে ধরা যাক x অবিচ্ছিন্ন চলক ও তার সম্ভাবনা-ঘনত্ব অপেক্ষক

$$f(x)=1/(\beta-\alpha), \qquad \alpha<x<\beta$$

আমরা উদাহরণ 4-এ দেখেছি যে, এ ক্ষেত্রে $E(x)=(\beta+\alpha)/2$।
সুতরাং

$$E(x-\mu)^2=\int_{\alpha}^{\beta}\left(x-\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\beta-\alpha}\,dx$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\left(x-\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2 dx$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{-(\beta-\alpha)/2}^{(\beta-\alpha)/2} y^2 dy \left[y=x-\frac{\beta+\alpha}{2} \text{ বসালে}\right]$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-(\beta-\alpha)/2}^{(\beta-\alpha)/2}$$

$$=\frac{1}{3(\beta-\alpha)}\left[\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3-\left(-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3\right]$$

$$=(\beta-\alpha)^2/12$$

তাই এক্ষেত্রে

$$\sigma=(\beta-\alpha)/2\sqrt{3}$$

উদাহরণ 9. এখন মনে করা যাক x অবিচ্ছিন্ন চলক এবং তার সম্ভাবনা-বিভাজন সুষম প্রকৃতির। এর সম্ভাবনা-ঘনত্ব অপেক্ষক যদি

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

হয়, তবে উদাহরণ 5-থেকে μ-ই চলকের প্রত্যাশিত মান। আবার,

$$E(x-\mu)^2=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y^2 e^{-y^2/2}dy \quad [\, y=(x-\mu)/\sigma \text{ বসালে} \,]$$

এখন, $y^2e^{-y^2/2}$-কে $u=y$ এবং $v=ye^{-y^2/2}$ এই দুটি অপেক্ষকের গুণফল হিসাবে দেখা যেতে পারে। তাই

$$\int_{-\infty}^{\infty}y^2e^{-y^2/2}\,dy=u\int vdy\,\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{du}{dy}\int vdy\right]dy$$

$$=y\left(-e^{-y^2/2}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}1\left(-e^{-y^2/2}\right)dy$$

$$=0+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2/2}\,dy$$

সুতরাং

$$E(x-\mu)^2=\sigma^2.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2/2}dy$$

$$=\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx=\sigma^2$$

অর্থাৎ σ-ই এখানে চলকের সমক পার্থক্য।

সহগতি সহগ

কোনো দুই চলকের সম্ভাবনা বিভাজনের পরিপ্রেক্ষিতে তাদের পারস্পরিক সম্পর্কের মাত্রা নিরূপণ করা প্রয়োজন হতে পারে। এ উদ্দেশ্যে সাধারণত সহগতি সহগ (correlation coefficient) নামক পরিমাপটি ব্যবহৃত হয়।

আগের মতোই ধরা যাক x ও y এর প্রত্যাশিত মান যথাক্রমে μ_x ও μ_y এবং তাদের সমক পার্থক্য যথাক্রমে σ_x ও σ_y (ধরে নেওয়া হবে যে $\sigma_x>0$ এবং $\sigma_y>0$)। এবারে σ_x^2 ও σ_y^2 এর অনুরূপ একটি পরিমাপ নেওয়া হবে :

$$\sigma_{xy}=E(x-\mu_x)(y-\mu_y)$$

লক্ষণীয় যে, x ও y উভয়ই বিচ্ছিন্ন চলক হলে

$$\sigma_{xy}=\sum_i \sum_j (x_i-\mu_x)(y_j-\mu_y)\ p\ (x_i,\ y_j)$$

এবং যদি উভয়ই অবিচ্ছিন্ন চলক হয়, তবে

$$\sigma_{xy}=\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta (x-\mu_x)\ (y-\mu_y)\ f(x,\ y)\ dxdy$$

তা হলে x ও y-এর সহগতি সহগ

$$\rho=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$

যদি x ও y পরস্পর স্বতন্ত্র হয়, তবে $\sigma_{xy}=0$ এবং ফলে $\rho=0$। আবার একটি চলকের বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে যদি অন্যটিও সাধারণভাবে বৃদ্ধি পায়, তবে $\rho>0$, এবং একটি বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে যদি অন্যটি সাধারণভাবে হ্রাস পায়, তবে $\rho<0$। এটাও প্রমাণ করা যাবে যে, সকল ক্ষেত্রেই

$$-1\leqslant\rho\leqslant1$$

উদাহরণ 10. পঞ্চম অধ্যায়ে আমরা যে যুগ্ম বিভাজনের উল্লেখ করেছি তার জন্যে x-এর সম্ভাব্য মান 0, 1 ও 2 এবং সংশ্লিষ্ট সম্ভাবনা যথাক্রমে 20/56, 30/56 ও 6/56। সুতরাং

$$\mu_x=0\times\tfrac{20}{56}+1\times\tfrac{30}{56}+2\times\tfrac{6}{56}$$
$$=\tfrac{3}{4}$$

অনুরূপভাবে,

$$\mu_y=0\times\tfrac{10}{56}+1\times\tfrac{30}{56}+2\times\tfrac{15}{56}+3\times\tfrac{1}{56}$$
$$=\tfrac{9}{8}$$

আবার,

$$\sigma_x^2=(0-\tfrac{3}{4})^2\times\tfrac{20}{56}+(1-\tfrac{3}{4})^2\times\tfrac{30}{56}+(2-\tfrac{3}{4})^2\times\tfrac{6}{56}$$
$$=360/(16\times56)=45/(2\times56)$$

এবং

$$\sigma_y^2=(0-\tfrac{9}{8})^2\times\tfrac{10}{56}+(1-\tfrac{9}{8})^2\times\tfrac{30}{56}+(2-\tfrac{9}{8})^2\times\tfrac{15}{56}+(3-\tfrac{9}{8})^2\times\tfrac{1}{56}$$

$$=\frac{1800}{64\times56}=\frac{225}{8\times56}$$

এখন, (x,y) যুগ্মভাবে যে মানগুলি গ্রহণ করতে পারে সেগুলি হল (0,0), (0,1),⋯,(0,3), (1,0), (1,1),⋯, (1,3), (2,0), (2,1),⋯, (2,3) এবং এদের সম্ভাবনা যথাক্রমে 1/56, 9/56,⋯, 1/56, 6/56, 18/56,⋯,0, 3/56, 3/56,...,0। সুতরাং

$$\sigma_{xy}=(0-\tfrac{3}{4})(0-\tfrac{9}{8})\times\tfrac{1}{56}+(0-\tfrac{3}{4})(1-\tfrac{9}{8})\times\tfrac{9}{56}+\cdots$$
$$+(2-\tfrac{3}{4})(3-\tfrac{9}{8})\times 0$$
$$=-420/(32\times 56)$$

তাই এক্ষেত্রে x ও y-এর সহগতি সহগ

$$\rho=\frac{-420/(32\times 56)}{\sqrt{\frac{45}{4\times 56}\times\frac{225}{8\times 56}}}=-\frac{7}{\sqrt{180}}=-0{\cdot}522$$

প্রত্যাশিত মান, সমক পার্থক্য ও সহগতি সহগ প্রসঙ্গে কয়েকটি উপপাদ্য

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে আমরা চলকের প্রত্যাশিত মান, সমক পার্থক্য ও সহগতি সহগ সম্পর্কে আলোচনা করেছি। বর্তমান অধ্যায়ে এই প্রসঙ্গে কয়েকটি প্রয়োজনীয় উপপাদ্যের কথা বলা হবে। উপপাদ্যগুলি আমরা সরলতার খাতিরে সসীম-সংখ্যক মানবিশিষ্ট বিচ্ছিন্ন চলকের বেলায়ই প্রমাণ করব। তবে অন্য ধরনের চলকের ক্ষেত্রেও, যদি তাদের প্রত্যাশিত মান, সমক পার্থক্য ও সহগতি সহগ অর্থবহ হয়, এগুলি সত্য হবে। শুধু সেক্ষেত্রে এগুলি প্রমাণ করতে হলে জটিলতর গণিতের সাহায্য নিতে হবে।

উপপাদ্য 1

যদি $x=a$ (একটি ধ্রুবমান) হওয়ার সম্ভাবনা 1 হয়, তবে

$$E(x)=a,\ \sigma=0$$

প্রমাণ : প্রত্যাশিত মানের সংজ্ঞানুসারে,

$$E(x)=a\times 1=a$$

আবার, সমক পার্থক্যের সংজ্ঞানুসারে,

$$\sigma^2=E(x-a)^2$$
$$=(a-a)^2\times 1=0$$

উপপাদ্য 2

যদি $y=a+bx$ হয়, তবে

$$E(y)=a+b\ E(x),\ \sigma_y=|b|\sigma_x$$

প্রমাণ : ধরা যাক x-এর সম্ভাব্য মান $x_1, x_2, \cdots, x_k$। তা হলে

y-এর সংশ্লিষ্ট মান যথাক্রমে $y_1 = a+bx_1$, $y_2 = a+bx_2, \cdots$, $y_k = a+bx_k$ হবে। এবারে

$$E(y) = \sum_i y_i \times P[y=y_i].$$

$$= \sum_i (a+bx_i) \times P[x=x_i],$$

কারণ $y=y_i$ কেবল তখনই হবে যখন $x=x_i$

$$= a\sum_i P[x=x_i] + b\sum_i x_i \times P[x=x_i]$$

$$= a\times 1 + b\times E(x) = a+bE(x)$$

আবার

$$\sigma_y^2 = \sum_i [y_i - E(y)]^2 \times P[y=y_i]$$

$$= \sum_i b^2 \times [x_i - E(x)]^2 \times P[x=x_i]$$

$$= b^2 \sum_i [x_i - E(x)]^2 \times P[x=x_i]$$

$$= b^2\sigma_x^2$$

সুতরাং

$$\sigma_y = |b|\sigma_x$$

উপপাদ্য 3

যদি $z=x+y$ হয়, তবে

$$E(z) = E(x)+E(y),\ \sigma_z^2 = \sigma_x^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2$$

প্রমাণ: মনে করা যাক x-এর সম্ভাব্য মান $x_1, x_2, \cdots, x_k$ এব

y-এর সম্ভাব্য মান $y_1, y_2, \cdots, y_l$। আর $P[x=x_i, y=y_j]$-কে p_{ij} দিয়ে সূচিত করা যাক। তা হলে

$$E(z)=\sum_i \sum_j (x_i+y_j)\times p_{ij}$$

$$=\sum_i \sum_j x_i\times p_{ij}+\sum_i \sum_j y_j\times p_{ij}$$

$$=x\sum_i {}_i\times p_{io}+\sum_j y_j\times p_{oj}$$

(এখানে $p_{io}=\sum_j p_{ij}$, $p_{oj}=\sum_i p_{ij}$)

কিন্তু

$$p_{io}=P[x=x_i],\ p_{oj}=P[y=y_j]$$

সুতরাং

$$E(z)=E(x)+E(y)$$

আবার,

$$\sigma_z{}^2=E[z-E(z)]^2$$

$$=E[\{x-E(x)\}+\{y-E(y)\}]^2$$

$$=E[x-E(x)]^2+2E[x-E(x)]\,[y-E(y)]+E[y-E(y)]^2$$

$$=\sigma_x{}^2+2\rho\sigma_x\sigma_y+\sigma_y{}^2$$

উপপাদ্য 4

যদি x ও y পরস্পর স্বতন্ত্র চলক হয়, তবে

$$E(xy)=E(x)\times E(y)$$

এবং $\rho=0$

প্রমাণ: উপপাদ্য 3-এ যে ধরনের প্রতীক ব্যবহার করেছিলাম, এবারেও আমরা তাই ব্যবহার করব। তা হলে

$$E(xy) = \sum_i \sum_j (x_i y_j) p_{ij}$$

কিন্তু x ও y পরস্পর স্বতন্ত্র হওয়ায় $p_{ij} = p_{io}\ p_{oj}$। তাই

$$E(xy) = \sum_i \sum_j (x_i p_{io}) \times (y_j p_{oj})$$

$$= (\sum_i x_i p_{io}) \times (\sum_j y_j p_{oj})$$

$$= E(x) \times E(y)$$

অনুরূপভাবে দেখানো যাবে যে,

$$E(x-\mu_x)(y-\mu_y) = E(x-\mu_x) \times E(y-\mu_y)$$

কিন্তু $$E(x-\mu_x) = E(x) - \mu_x$$

$$= \mu_x - \mu_x = 0$$

তেমনি

$$E(y-\mu_y) = 0$$

তাই $$E(x-\mu_x)(y-\mu_y) = 0$$

এবং ফলে

$$\rho = 0$$

অনুসিদ্ধান্ত : x ও y পরস্পর-স্বতন্ত্র চলক হলে, যেহেতু $\rho = 0$ হবে, তাই যদি $z = x + y$ হয়, তবে

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

উপরে দেখানো হয়েছে যে, x ও y পরস্পর-স্বতন্ত্র চলক হলে $\rho = 0$ হবে। এটা বলা কিন্তু ঠিক হবে না যে, $\rho = 0$ হলে x ও y পরস্পর-স্বতন্ত্র চলক। উদাহরণস্বরূপ নিম্নের যুগ্ম বিভাজনটির কথা ভাবা যেতে পারে :

		x-এর মান			মোট
		−1	0	1	
y-এর মান	−1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
মোট		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

এক্ষেত্রে

$$\mu_x = -1\times\tfrac{1}{4}+0\times\tfrac{1}{2}+1\times\tfrac{1}{4}=0$$

$$\mu_y = -1\times\tfrac{1}{4}+0\times\tfrac{1}{2}+1\times\tfrac{1}{4}=0$$

সুতরাং

$$\begin{aligned}E(x-\mu_x)(y-\mu_y) &= E(xy)\\ &=(-1)(-1)\times 0+(-1)\times 0\times\tfrac{1}{4}+(-1)\times 1\times 0\\ &\quad+0\times(-1)\times\tfrac{1}{4}+0\times 0\times 0+0\times 1\times\tfrac{1}{4}\\ &\quad+1\times(-1)\times 0+1\times 0\times\tfrac{1}{4}+1\times 1\times 0\\ &=0\end{aligned}$$

ফলে এখানে $\rho=0$। কিন্তু x ও y এখানে মোটেই পরস্পর-স্বতন্ত্র চলক নয়। উদাহরণ হিসেবে বলা যায়

$$P[x=-1,\ y=-1]=0$$

কিন্তু যেহেতু

$$P[x=-1]=P[y=-1]=\tfrac{1}{4}$$

তাই $\qquad P[x=-1,\ y=-1]\neq P[x=-1]\times P[y=-1]$

উপপাদ্য 5

সকল ক্ষেত্রেই, অর্থাৎ যে কোনো দুই চলকের সহগতি সহগের জন্যে,

$$-1 \leqslant \rho \leqslant 1$$

প্রমাণ : যদি $u=(x-\mu_x)/\sigma_x$ ও $v=(y-\mu_y)/\sigma_y$ বসানো হয়, তবে আমরা লিখতে পারি

$$\rho = E\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)$$

$$=E(uv)$$

কিন্তু

$$E(u^2)=E(x-\mu_x)^2/\sigma_x^2=1,\ E(v^2)=1$$

তাই

$$E(uv)=\tfrac{1}{2}E[(u+v)^2-u^2-v^2]$$

$$=\tfrac{1}{2}E(u+v)^2-1$$

$$\geqslant -1$$

আবার,

$$E(uv)=\tfrac{1}{2}E[u^2+v^2-(u-v)^2]$$

$$=1-\tfrac{1}{2}E(u-v)^2$$

$$\leqslant 1$$

অর্থাৎ

$$-1 \leqslant \rho \leqslant 1$$

উপপাদ্য 6 : চেবিশেফ (Chebyshev)-এর উপপাদ্য

ধরা যাক x চলকটির প্রত্যাশিত মান ও সমক পার্থক্য যথাক্রমে μ ও σ । তা হলে যে কোনো ধনাত্মক রাশি t-র জন্যে,

$$P[|x-\mu| \leqslant \sigma t] > 1-\frac{1}{t^2}\ ।$$

প্রমাণ : প্রথমে অঋণাত্মক মানবিশিষ্ট কোনো চলক u নেওয়া যাক যার প্রত্যাশিত মান ν।

যদি $\nu=0$ হয়, তবে $P[u=0]=1$। তাই

$$P[u\leqslant \nu t^2]=P[u=0]$$
$$=1$$
$$>1-\frac{1}{t^2}$$

যদি $\nu>0$ হয়, তবে ধরা যাক u-এর সকল সম্ভাব্য মান হল u_1, u_2, $\cdots$, u_i, u_{i+1}, $\cdots$, u_k এবং তাদের সম্ভাবনা যথাক্রমে p_1, p_2, $\cdots$, p_i, p_{i+1}, $\cdots$, p_k। মানগুলিকে এভাবে সাজানো হল যে, u_1, u_2, $\cdots$, u_i এই মানগুলির প্রতিটি $\leqslant \nu t^2$ এবং অন্যগুলির প্রতিটি $>\nu t^2$। তা হলে

$$\nu=u_1\times p_1+u_2\times p_2+\cdots+u_i\times p_i+u_{i+1}\times p_{i+1}+\cdots+u_k\times p_k$$
$$\geqslant u_{i+1}\times p_{i+1}+u_{i+2}\times p_{i+2}+\cdots+u_k\times p_k$$
$$>\nu t^2(p_{i+1}+p_{i+2}+\cdots+p_k)$$

অর্থাৎ $\nu>\nu t^2\times P[u>\nu t^2]$

বা $P[u>\nu t^2]<\dfrac{1}{t^2}$

আবার, যেহেতু $P[u\leqslant \nu t^2]=1-P[u>\nu t^2]$, তাই এক্ষেত্রেও

$$P[u\leqslant \nu t^2]>1-\frac{1}{t^2}$$

এবারে u-এর পরিবর্তে $(x-\mu)^2$ লেখা যাক। তা হলে ν-এর পরিবর্তে $E(x-\mu)^2$ অর্থাৎ σ^2 লিখতে হবে। এভাবে আমরা পাই

$$P[(x-\mu)^2\leqslant \sigma^2 t^2]>1-\frac{1}{t^2}$$

অর্থাৎ

$$P[|x-\mu|\leqslant \sigma t]>1-\frac{1}{t^2}$$

বৃহৎ সংখ্যার নিয়ম ও বের্নুলির উপপাদ্য

আমরা এখানে চলকের একটি ক্রম (sequence of variables) নিয়ে কাজ করব। ক্রমের সকল চলকের সম্ভাবনা-বিভাজন অভিন্ন বলে ধরা হবে এবং চলকগুলিকে পরস্পর-স্বতন্ত্র বলেও মনে করা হবে। ধরা যাক এই চলকগুলি হল x_1, x_2, ⋯এবং তাদের প্রত্যেকের প্রত্যাশিত মান μ ও সমক পার্থক্য σ।

এবারে ক্রমের প্রথম n-টি চলক নেওয়া যাক। যদি

$$\bar{x}_n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$$

হয়, তবে এই নূতন চলকের প্রত্যাশিত মান ও সমক পার্থক্য যথাক্রমে μ ও $\sqrt{\frac{1}{n^2} \times n\sigma^2} = \sigma/\sqrt{n}$। তাই চেবিশেফের উপপাদ্য অনুসারে যে কোনো ধনাত্মক রাশি t-র জন্যে

$$P[|\bar{x}_n - \mu| \leqslant t\sigma/\sqrt{n}] > 1 - 1/t^2$$

ফলে, যে কোনো দুটি ধনাত্মক রাশি ϵ ও η দেওয়া থাকলে, তারা যত ক্ষুদ্রই হোক না কেন, যদি $n > \sigma^2/\eta\epsilon^2$ হয়, তবে

$$P[|\bar{x}_n - \mu| \leqslant \epsilon] > 1 - \frac{1}{n\epsilon^2/\sigma^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$
$$> 1 - \eta$$

অর্থাৎ ϵ ও η যত ক্ষুদ্রই হোক না কেন, n যথেষ্ট বড়ো হলে

$$P[|\bar{x}_n - \mu| \leqslant \epsilon] > 1 - \eta$$

হবে।

এখানে x_1, x_2, ⋯x_n-কে n-আয়তনের একটি অংশকের জন্যে x-এর n-টি মান হিসেবে দেখা যেতে পারে। সেক্ষেত্রে $\bar{x}_n$ অংশকের গড়মান

(sample mean) ও μ সমগ্রের গড়মান (population mean) হবে। তাই বলা যায় যে, অংশকের আয়তন যথেষ্ট বড়ো নিলে, সমগ্রের গড়মান থেকে অংশকের গড়মানের বিচ্যুতির পরিমাণ যে কোনো নির্দিষ্ট মাত্রার নিম্নে থাকবে, এরূপ সম্ভাবনাকে ইচ্ছানুসারে বাড়ানো যাবে।

এই ফলটিকেই সম্ভাবনাতত্ত্বে বৃহৎ সংখ্যার নিয়ম (Law of large number) বলে অভিহিত করা হয়। (বস্তুত আমরা এখানে ঐ নিয়মের একটি সরলতর রূপকেই উপস্থাপিত করেছি।)

এবারে কোনো পরীক্ষা পুনঃপুন সম্পাদনের কথা ভাবা যাক। ধরা যাক পরীক্ষা-সম্পাদনে কোনো ঘটনা A-র সম্ভাবনা p। পরীক্ষার i-তম অনুষ্ঠানের সঙ্গে একটি চলক x_i সংশ্লিষ্ট রয়েছে ভাবা যেতে পারে— ঐ অনুষ্ঠানে A ঘটলে x_i-এর মান 1 হয়, অন্যথা এর মান 0 হয়। তা হলে, x_1, $x_2, \cdots$ — এই ক্রমের চলকগুলির সম্ভাবনা-বিভাজন অভিন্ন এবং প্রত্যেকের প্রত্যাশিত মান ও সমক পার্থক্য যথাক্রমে p ও $\sqrt{p(1-p)}$। আবার, $x_1+x_2+\cdots+x_n$ এই সমষ্টি পরীক্ষার প্রথম n অনুষ্ঠানে A ক'বার ঘটছে তা-ই বোঝায়। সুতরাং $\bar{x}_n=(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n$ এখানে ঐ n অনুষ্ঠানে A-র আনুপাতিক পরিসংখ্যা (f_n/n) দেবে। ফলে, বৃহৎ সংখ্যার নিয়ম থেকে আমরা নিম্নের উপপাদ্যটি পাচ্ছি :

ϵ ও η যত ক্ষুদ্র ধনাত্মক রাশিই হোক না কেন, n-কে যথেষ্ট বড়ো নিলে

$$P\left[\left|\frac{f_n}{n}-p\right|\leqslant\epsilon\right]>1-$$

হবে

এই উপপাদ্যটির নাম বের্‌নুলির উপপাদ্য (Bernoulli's theorem)। বের্‌নুলির উপপাদ্যের অর্থ হল এই যে, পরীক্ষা যত বেশি বার অনুষ্ঠিত হবে, আমরা ততই বেশি করে সুনিশ্চিত হতে পারব যে, f_n/n ও p-র মধ্যে

প্রভেদ অতি সামান্য হবে। প্রথম অধ্যায়ে বলা হয়েছিল যে, কোনো ঘটনার সম্ভাবনাকে পরীক্ষার বহুসংখ্যক অনুষ্ঠানে ঘটনার আনুপাতিক পরিসংখ্যার 'সীমা' হিসাবে দেখা হবে। বের্নুলির উপপাদ্য থেকে এ উক্তির যাথার্থ্য প্রতীয়মান হবে। আবার, কোনো ক্ষেত্রে p-র মান জানা না থাকলে, যদি পরীক্ষা-সম্পাদনের মোট সংখ্যা n যথেষ্ট বড়ো হয়, তবে f_n/n-কে p-র একটি সুষ্ঠু অনুমানাঙ্ক হিসাবে গ্রহণ করা যাবে।

সম্ভাবনাতত্ত্বের উপযোগিতা

রাশিবিজ্ঞানে

সম্ভাবনাতত্ত্বের উপযোগিতা আলোচনা করতে হলে প্রথমেই রাশিবিজ্ঞানের নানা শাখায় এর প্রয়োগের কথা বলতে হয়। জীবনের বিভিন্ন ক্ষেত্রে অহরহ যে সংখ্যাগত তথ্য পাওয়া যায়, তার বিশ্লেষণ ও ব্যাখ্যাই রাশিবিজ্ঞানের মুখ্য আলোচ্য বিষয়।

যে বস্তু, প্রাণী বা ব্যক্তি-সমষ্টির জন্যে এরূপ তথ্য আহরণ করা হয়, তার মূলে একই মুখ্য কারণপ্রণালী ক্রিয়াশীল বলা গেলেও, অনেক অপেক্ষাকৃত গৌণ কারণও এর পেছনে কাজ করে, যে কারণগুলি সমষ্টির অন্তর্গত ব্যষ্টি থেকে ব্যষ্টিতে পরিবর্তনশীল। তাই ব্যষ্টি সম্পর্কে কোনো নিয়ম গড়ে তোলা সম্ভব নয়। কিন্তু পূর্বে পারিসংখ্যানিক নিয়মানুগতা সম্বন্ধে যা বলা হয়েছিল তা মনে রাখলে বলা যায় সমষ্টির লক্ষণগুলি নিয়ম মেনে চলে। তাই 'অমুক দেশের প্রাপ্তবয়স্ক পুরুষদের উচ্চতা 5·5 ফুট থেকে 5·7 ফুটের মধ্যে থাকার সম্ভাবনা 0·43' বা 'ঐ দেশের প্রাপ্তবয়স্ক পুরুষদের গড় উচ্চতা 5·6 ফুট' ইত্যাদি বাক্য অর্থবহ। সমষ্টির সদস্যদের কোনো লক্ষণের জন্যে একটি সম্ভাবনা-বিভাজনের কথা আমরা তা হলে ভাবতে পারি।

আবার, এরূপ সমষ্টি বা সমগ্র (population) থেকে একটি অংশক (sample) নির্বাচন করা হলে, উপযুক্ত নির্বাচন প্রণালীর ক্ষেত্রে অংশকের প্রকৃতি সম্বন্ধে সম্ভাবনাতত্ত্বের ভিত্তিতে পূর্বাভাস দান করা সম্ভব। ফলে অংশকের কোনো পরিমাপ (যথা, গড়মান, সমক পার্থক্য প্রভৃতি) এবং সমগ্রের অনুরূপ পরিমাপের মধ্যে কীরূপ ব্যত্যয় প্রত্যাশিত, তা-ও সম্ভাবনাতত্ত্বের সাহায্যে বলা যাবে। অর্থাৎ অংশকের পরিমাপকে সমগ্রের পরিমাপের অনুমানাঙ্ক (estimate) হিসাবে ব্যবহার করলে যে ভুল হতে

পারে, আমরা তার সম্বন্ধে একটা ধারণা দিতে পারি। অন্যদিকে সমগ্রের প্রকৃতি সম্বন্ধে যদি আমাদের কোনো প্রকল্প (hypothesis) থাকে, তবে নির্বাচিত অংশকের ভিত্তিতে এবং সম্ভাবনার মাপকাঠিতে সেই প্রকল্প বিচার করা যাবে।

আমরা এখানে একটি বিশেষ ধরনের অংশকের কথাই আলোচনা করব। অংশকের n-সংখ্যক ব্যষ্টির জন্যে কোনো সংখ্যাগত লক্ষণ x-এর মান যদি $x_1, x_2, \cdots, x_n$ হয় তবে ধরে নেওয়া হবে যে, (1) এই প্রতিটি মানের সম্ভাবনা-বিভাজন x-এর সম্ভাবনা-বিভাজনের সমান এবং (2) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ পরস্পর স্বতন্ত্র।

এবারে $x_1, x_2 \cdots, x_n$-এর কোনো অপেক্ষক t-র কথা ভাবা যাক। t-কে একটি অংশাঙ্ক (statistic) বলা হবে। তা হলে t-র মান সমগ্রের বিভিন্ন অংশকের জন্যে বিভিন্ন হতে পারে, কারণ $x_1, x_2, \cdots, x_n$-এর মানও অংশক থেকে অংশকে পরিবর্তিত হতে পারে। ফলে অংশাঙ্ক t-র একটি সম্ভাবনা-বিভাজন (sampling distribution) থাকবে। অন্য বিভাজনের মতোই এর প্রত্যাশিত মান, সমক পার্থক্য ইত্যাদি পরিমাপের কথা ভাবা যেতে পারে।

অংশকের গড় $\bar{x}$-এর কথাই নেওয়া যাক। যেহেতু

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

তাই সমগ্রের জন্যে x-এর প্রত্যাশিত মান যদি μ হয়, তবে $\bar{x}$-এর প্রত্যাশিত মান

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n}[E(x_1) + E(x_2) + \cdots + E(x_n)]$$

$$= \frac{1}{n} \times n\mu$$

$$= \mu$$

আবার, σ যদি x-এর সমক পার্থক্য হয়, তবে

$$\text{var}(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}[\text{var}(x_1)+\text{var}(x_2)+\cdots+\text{var}(x_n)]$$

$$= \frac{1}{n} \times n\sigma^2$$

$$= \sigma^2/n$$

অর্থাৎ $\bar{x}$-এর সমক পার্থক্য

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$$

এভাবে সমগ্রের প্রকৃতি থেকে অংশকের প্রকৃতি নিরূপণ করা যাবে। x-এর সম্ভাবনা-বিভাজনের পূর্ণ রূপটি জানা থাকলে, অংশাঙ্কের সম্ভাবনা বিভাজনও সম্পূর্ণভাবে জানা যাবে।

উদাহরণ হিসেবে বলা যায়, x-এর বিভাজন যদি সুষম বিভাজন হয় এবং তার প্রত্যাশিত মান ও সমক পার্থক্য যদি যথাক্রমে μ ও σ হয়, তবে $\bar{x}$-এর বিভাজনও সুষম প্রকৃতির হবে এবং তার প্রত্যাশিত মান ও সমক পার্থক্য যথাক্রমে μ ও $\sigma/\sqrt{n}$ হবে।

$\bar{x}$-কে যদি μ-এর অনুমানাঙ্ক হিসেবে দেখা যায়, তবে তার গুণাগুণ সম্বন্ধে উপরের ফলগুলি থেকে খানিকটা ধারণা পাওয়া যাবে। প্রথমত দেখা যাচ্ছে $\bar{x}$-এর প্রত্যাশিত মান (estimate mean) μ। তাই যদিও কোনো নির্দিষ্ট অংশকে $\bar{x}$ সমগ্রাঙ্ক μ থেকে ভিন্ন হতে পারে, তবু একই আকৃতির অনেক অংশক নিলে $\bar{x}$ 'গড়ে' μ-এর সমান হবে। $\bar{x}$ তাই μ-এর একটি অপ্রবণ অনুমানাঙ্ক (unbiased estimate)। দ্বিতীয়ত অংশকের আকৃতি n যতই বৃদ্ধি পাবে, $\bar{x}$-এর সমক পার্থক্য (estimate standard deviation) বা সমক বিচ্যুতি (standard error) $\sigma/\sqrt{n}$ ততই হ্রাস পাবে, অর্থাৎ $\bar{x}$-এর বিভাজন ততই μ-এর নিকটে কেন্দ্রীভূত

হবে। কাজেই n যথেষ্ট বড়ো হলে প্রদত্ত অংশকের গড়মান μ থেকে সামান্য পরিমাণেই ভিন্ন হবে এরূপ আশা করা যায়। $\bar{x}$ তাই μ-এর সমঞ্জস অনুমানাঙ্ক (consistent estimate)-ও বটে।

μ-সম্পর্কে কোনো প্রকল্প দেওয়া থাকলে তাও $\bar{x}$-এর ভিত্তিতে বিচার (test) করা যাবে। ধরা যাক আমাদের প্রকল্প হল এই যে, $\mu = \mu_0$। কোনো কারখানার মালিক যদি বলেন যে, তাঁদের প্রস্তুত বর্ষাতির (গড়) ওজন 2 কিলোগ্রাম, এবং তাঁর কথার সত্যতা যাচাই করা যদি আমাদের উদ্দেশ্য হয়, তবে বিচার্য প্রকল্প এ ধরনের হবে। এখানে আমরা ধরে নেব যে, আলোচ্য চলক x-এর সম্ভাবনা বিভাজন সুষম প্রকৃতির এবং তার সমক পার্থক্য σ-র মান জানা আছে। তা হলে প্রকল্প অনুসারে $\bar{x}$-এর পক্ষে $\mu_0 - 1{\cdot}96\sigma/\sqrt{n}$ ও $\mu_0 + 1{\cdot}96\sigma/\sqrt{n}$ এই দুই সীমার মধ্যে থাকার সম্ভাবনা 0·95 এবং এদের বাইরে পড়ার সম্ভাবনা 0·05 মাত্র। অর্থাৎ একই আকৃতির অনেক অংশক নিলে শতকরা মাত্র 5টি ক্ষেত্রে অংশকের গড়মান এই দুই সীমার বাইরে পড়বে। তাই আমাদের কাছে যে অংশকটি থাকবে তার জন্যে $\bar{x}$-এর মান যদি এই অন্তরের বাইরে পড়ে, তবে তাকে প্রকল্পানুসারে প্রায় অসম্ভাব্য একটি ঘটনা বলে দেখতে হবে। কিন্তু যেহেতু এমন ঘটনা সত্যি ঘটেছে, তাই এরূপ ক্ষেত্রে আমরা স্বভাবতঃই প্রকল্পের সত্যতায় সন্দিহান হব। অন্যদিকে, $\bar{x}$-এর মান এই অন্তরের ভিতরে পড়লে প্রকল্পকে গ্রহণীয় বলে মেনে নিতে আমাদের আপত্তি হবে না।

যে সম্ভাবনার ভিত্তিতে (এখানে 0·05) প্রকল্পকে বর্জনীয় বা গ্রহণীয় বলে গণ্য করা হয়, তাকে প্রকল্প-বিচারের সংশয় মাত্রা (level of significance) বলা হয়। অবশ্যই এই সংশয় মাত্রা বিভিন্ন পরিস্থিতিতে বিভিন্ন হতে পারে এবং এর নির্বাচন মুখ্যত অনুসন্ধানীর বিচার-বুদ্ধির উপর নির্ভর করবে।

তা হলে প্রকল্প বিচারের সাধারণ প্রণালী হল এই : একটি উপযুক্ত অংশাঙ্ক বেছে নিয়ে তার সম্ভাব্য মানগুলিকে দু-ভাগে ভাগ করা হবে। প্রথম ভাগে থাকবে সেই মানগুলি প্রকল্প অনুসারে যাদের সম্ভাবনা বেশি এবং দ্বিতীয় ভাগে থাকবে অন্য মানগুলি (যাদের সম্ভাবনা এই প্রকল্প অনুসারে স্বল্প. কিন্তু কোনো ভিন্ন প্রকল্প অনুসারে স্বল্প নয়)। যদি আমাদের হাতে যে অংশক রয়েছে তার জন্যে অংশাঙ্কের মান প্রথম ভাগে পড়ে, তবে প্রকল্পকে গ্রহণীয় বলে ধরা হবে ; অন্যথা প্রকল্পকে বর্জনীয় বলে মনে করা হবে।

কোনো সমগ্রাঙ্কের মান নির্ণয় করতে গিয়ে আমরা অনেক সময় একটি অনুমানাঙ্কের পরিবর্তে অংশক থেকে নির্ণীত একটি অন্তরের সাহায্য নিই। উপরের উদাহরণের মতোই ধরা যাক কোনো সুষম বিভাজনের জন্যে μ অজ্ঞাত কিন্তু σ জানা আছে। এক্ষেত্রে আগেই বলা হয়েছে যে,

$$P[\mu - 1{\cdot}96\sigma/\sqrt{n} \leqslant \bar{x} \leqslant \mu + 1{\cdot}96\sigma/\sqrt{n}] = 0{\cdot}95$$

বা

$$P[\bar{x} - 1{\cdot}96\sigma/\sqrt{n} \leqslant \mu \leqslant \bar{x} + 1{\cdot}96\sigma/\sqrt{n}] = 0{\cdot}95$$

এর অর্থ হল এই যে, সমগ্র থেকে যদি একই আকৃতির অনেক অংশক নেওয়া যায় এবং প্রতি অংশকের জন্যে যদি $\bar{x} - 1{\cdot}96\sigma/\sqrt{n}$ ও $\bar{x} + 1{\cdot}96\sigma/\sqrt{n}$ এই সীমা দুটি নির্ণীত হয়, তবে শতকরা প্রায় 95টি ক্ষেত্রে সমগ্রাঙ্ক μ এদের মাঝখানে থাকবে এবং শুধু বাকি 5টি ক্ষেত্রে μ এদের বাইরে পড়বে। তাই আমাদের হাতে যে নির্দিষ্ট অংশকটি থাকবে তার জন্যে সীমা দুটি বের করে আমরা যথেষ্ট আস্থার সঙ্গে বলতে পারি যে, μ এদের মধ্যবর্তী অন্তরে রয়েছে। এরূপ অন্তরকে আস্থাসূচক অন্তর (confidence interval) এবং সংশ্লিষ্ট সম্ভাবনাকে আস্থার মাত্রা (confidence coefficient) বলা হয়।

পদার্থবিদ্যা ও রসায়নশাস্ত্রে

পদার্থবিদ্যা ও রসায়নের সাম্প্রতিক অনেক মতবাদই সম্ভাবনাতত্ত্বের উপর প্রতিষ্ঠিত। আমরা পদার্থবিদ্যার কয়েকটি সুখ্যাত তত্ত্বে সম্ভাবনা-তত্ত্বের ব্যবহার সম্পর্কে আলোচনা করব।

কোনো পদার্থতন্ত্র (physical system)-কে যদি পদার্থকণা (particles)-এর সমষ্টি হিসেবে দেখা যায়, তবে তন্ত্রের লক্ষণ কণার লক্ষণ থেকেই উদ্ভূত বলা চলে।

পদার্থতন্ত্র যে কণাগুলির সমষ্টি তাদের প্রত্যেকেই নানা বিকল্প অবস্থায় থাকতে পারে। যদি কণাগুলির মোট সংখ্যা r হয় এবং প্রতি কণার সম্ভাব্য অবস্থার সংখ্যা যদি n হয়, তবে সমস্ত কণা মিলিয়ে যে অবস্থার সৃষ্টি তাকে তন্ত্রের বৈশিষ্ট্য হিসেবে দেখতে হবে। এখন, তন্ত্রের এই সামগ্রিক অবস্থার বর্ণনায় তিন ধরনের কাঠামো ব্যবহার করা হয়েছে।

1. প্রথমে ধরা যাক যে, কণাগুলির সব ক-টি পরস্পর বিসদৃশ এবং সম্ভাব্য n অবস্থা এ প্রকারের যে, তাদের প্রতিটিতে একাধিক কণা থাকা সম্ভব। এ ক্ষেত্রে পদার্থতন্ত্রের সম্ভাব্য সামগ্রিক অবস্থার মোট সংখ্যা n^r।

ম্যাক্সওয়েল (Maxwell) ও বোলৎসমান (Boltzmann) তাঁদের মতবাদে এ ধরনের কাঠামো ব্যবহার করেছেন এবং এই n^r-টি অবস্থাকে সমসম্ভাব্য বলে ধরেছেন (অর্থাৎ প্রতিটির সম্ভাবনা $1/n^r$ বলে ধরে নিয়েছেন)।

এই তত্ত্বের প্রয়োগ করতে গিয়ে কিন্তু দেখা গেছে যে, এর মৌল কল্পনাগুলি খুব বাস্তবানুগ নয়। আধুনিকতর পদার্থবিজ্ঞানে তাই এরূপ কাঠামো বর্জিত হয়েছে।

2. এবারে মনে করা যাক কণাগুলি সম্পূর্ণ সদৃশ কিন্তু আগের

মতোই কণার সম্ভাব্য n অবস্থার প্রতিটিতে একাধিক কণা থাকা সম্ভব। এখানেও তন্ত্রের বিভিন্ন সামগ্রিক অবস্থার মোট সংখ্যা নির্ণয় করা যাক।

আমরা ভাবতে পারি $(n+1)$-টি দাঁড়ি পর পর সাজানো রয়েছে যারা n-টি কক্ষ (n-টি অবস্থার জন্যে) তৈরি করছে, এবং r-টি বিন্দু (কণাগুলির জন্যে) এই কক্ষসমূহে স্থাপন করতে হবে। দাঁড়ি ও বিন্দুর অবস্থান নিম্নের দৃষ্টান্তে দেখানো হল :

| . . | . . . . | | . . . | . . . | . |

প্রান্তবর্তী দুই দাঁড়ি স্থির রেখে অন্য $(n-1)$-টি দাঁড়ি ও r-টি বিন্দুকে মোট

$$\frac{(n+r-1)(n+r-2)\cdots\cdots n}{r(r-1)(r-2)\cdots 1}=\binom{n+r-1}{r}$$

ভাবে সাজানো যেতে পারে। তন্ত্রের বিভিন্ন সামগ্রিক অবস্থার এটাই হল মোট সংখ্যা।

বিজ্ঞানী সত্যেন্দ্রনাথ বসু ও আইনস্টাইন (Einstein) তাঁদের মতবাদে এই ধরনের কাঠামো ব্যবহার করেছেন এবং এই $\binom{n+r-1}{r}$-টি অবস্থাকে সমসম্ভাব্য বলে ধরে নিয়েছেন। তাঁদের কাঠামো ফোটন, নিউক্লিয়াস ও যুগ্ম-সংখ্যক প্রাথমিক কণা-সমন্বিত পরমাণুর বেলায় প্রযোজ্য বলে দেখা গেছে।

3. তৃতীয় ক্ষেত্রে ধরা হবে যে, পদার্থকণাগুলি সম্পূর্ণ সদৃশ কিন্তু কোনো অবস্থায়ই একাধিক কণা থাকা সম্ভব নয়।

আমরা এখানে ধরে নেব যে, $r \leqslant n$। সেক্ষেত্রে তন্ত্রের বিভিন্ন সামগ্রিক অবস্থার মোট সংখ্যা নির্ণয়, মোট n-টি বিসদৃশ দ্রব্য থেকে r-টি দ্রব্য নির্বাচন করার বিভিন্ন পন্থার সংখ্যা নির্ণয়ে পর্যবসিত হবে।

তাই এই সংখ্যাটি—

$$\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots\cdots1}=\binom{n}{r}$$

বিজ্ঞানী ফার্মি (Fermi) ও ডির‍্যাক (Dirac) তাঁদের মতবাদে এই প্রকারের কাঠামো নিয়ে কাজ করেছেন এবং তন্ত্রের $\binom{n}{r}$-টি অবস্থাকে সমসম্ভাব্য বলে ধরে নিয়েছেন। এই কাঠামো ইলেকট্রন, নিউট্রন ও প্রোটনের বেলায় প্রযোজ্য বলে পরিলক্ষিত হয়েছে।

জীববিজ্ঞানে

জীনতত্ত্ব (genetics) জীববিজ্ঞানের একটি প্রধান অঙ্গ। আর এই জীনতত্ত্বও সম্ভাবনাতত্ত্বকে আশ্রয় করে গড়ে উঠেছে। এর কয়েকটি মৌল ধারণা আমরা এখানে আলোচনা করব।

মেণ্ডেল (Mendel) নামে এক য়ুরোপীয় সন্ন্যাসী দীর্ঘদিন ধরে মটর-শুঁটির গাছ নিয়ে পরীক্ষা করেছিলেন। তাঁর উদ্দেশ্য ছিল গাছের কোনো লক্ষণ কেমন ভাবে বংশের এক শাখা থেকে অন্য শাখায় সঞ্চারিত হয়, তা-ই দেখা। মটর গাছের বেলায় এই লক্ষণগুলির প্রত্যেকে দুটি বিকল্প রূপ নিতে পারে ; যথা— মসৃণ বীজ বা কুঞ্চিত বীজ, দীর্ঘ বীজ বা হ্রস্ব বীজ, হলুদ আবরণের বীজ বা সবুজ আবরণের বীজ ইত্যাদি। বীজের কোনো বিশেষ লক্ষণের কথাই ভাবা যাক, যেমন আবরণের রঙ (হলুদ বা সবুজ)। সবুজ আবরণের বীজ থেকে সব সময় সবুজ আবরণের বীজ-সমন্বিত গাছই পাওয়া যায়। পক্ষান্তরে, হলুদ আবরণের বীজ থেকে কোনো ক্ষেত্রে শুধু হলুদ আবরণের বীজ-সমন্বিত গাছ এবং কোনো ক্ষেত্রে কিছু সবুজ আবরণের বীজ-সমন্বিত গাছ ও কিছু হলুদ আবরণের বীজ-সমন্বিত গাছ পাওয়া যায় বলে দেখা গেছে। কাজেই উদ্ভিদ্‌গুলিকে তিনটি শ্রেণীতে ভাগ করা যেতে পারে : বিশুদ্ধ

শ্রেণী A (যা থেকে সকল ক্ষেত্রেই হলুদ আবরণের বীজ-সমন্বিত উদ্ভিদ্ পাওয়া যায়), বিশুদ্ধ শ্রেণী B (যা থেকে সকল সময়ই সবুজ আবরণের বীজ-সমন্বিত উদ্ভিদ্ পাওয়া যায়) এবং সংকর শ্রেণী C (যা থেকে দু-ধরনের গাছই পাওয়া যায়)।

এখন, A শ্রেণীর উদ্ভিদের সঙ্গে B শ্রেণীর উদ্ভিদের মিশ্রণে যে সংকর সন্ততির জন্ম হয় তাকে F_1 প্রজা (generation) বলা হয়েছে। আবার F_1 প্রজার দুটি উদ্ভিদের মিশ্রণে যে সন্ততির জন্ম হয়, তার নাম দেওয়া হয়েছে F_2 প্রজা। F_2 প্রজার অনেক (580-টি) গাছ পরীক্ষা করে মেণ্ডেল লক্ষ্য করলেন 428-টি হলুদ আবরণের বীজ-সমন্বিত গাছ ও 152-টি সবুজ আবরণের বীজ-সমন্বিত গাছ রয়েছে, অর্থাৎ হলুদ আবরণ ও সবুজ আবরণ 2·82 : 1 এই অনুপাতে রয়েছে। শুধু আবরণের রঙ নয়, অন্য অনেক লক্ষণের ক্ষেত্রেও মেণ্ডেল দেখলেন লক্ষণের দুই বিকল্প রূপ প্রায় 3 : 1 অনুপাতে থাকে।

মেণ্ডেল এই নিয়মানুগতার একটি যুক্তিসহ ব্যাখ্যাও উপস্থাপিত করলেন। যে কোনো উদ্ভিদ্ বা প্রাণীর দেহ অসংখ্য জীবকোষের সমষ্টি। আর এই জীবকোষে ক্রোমোসোম (chromosome) নামে সূক্ষ্ম সুতার মতো এক প্রকার পদার্থ থাকে। এগুলি এত সূক্ষ্ম যে, অণুবীক্ষণ যন্ত্রের সাহায্য ছাড়া এদের দেখা সম্ভব নয়। এরা জোড়ায় জোড়ায় থাকে এবং একই প্রজাতি (species)-র সকল প্রাণী বা উদ্ভিদের ক্ষেত্রে এদের সংখ্যা সমান হয়। (যেমন, মানুষের ক্ষেত্রে 23 জোড়া ক্রোমোসোম থাকে।) ক্রোমোসোমকে জীন (gene)-এর আধার বলে ধরা হয়। (বস্তুত, সাম্প্রতিককালে অতি সূক্ষ্ম অণুবীক্ষণ যন্ত্রের মাধ্যমে এই জীনদের অস্তিত্ব ধরা পড়েছে।) আর এই জীনরাই উত্তরাধিকারসূত্রে প্রাপ্তব্য বিভিন্ন লক্ষণের নিয়ামক, এরূপ মনে করা হয়।

এই ভাবধারা অনুসারে, A শ্রেণীর কোনো উদ্ভিদের ক্ষেত্রে এক জোড়া জীন দিয়ে উদ্ভিদের আবরণের রঙ নির্ণীত হয়, এদের YY বলা যেতে পারে। আবার B শ্রেণীর কোনো উদ্ভিদের ক্ষেত্রে আবরণের রঙ নির্ণীত হবে এক জোড়া বিপরীত-ধর্মী জীন দিয়ে, এদের yy বলা যেতে পারে।

প্রতি ক্ষেত্রেই কোনো এক জোড়া জীন পরস্পর-সংলগ্ন এক জোড়া ক্রোমোসোমে অধিষ্ঠিত থাকে। প্রজনন-প্রক্রিয়ায় সন্তানের কোষ তৈরি হওয়ার সময় তার প্রতি জোড়া ক্রোমোসোমের একটি আসে পিতার দিক থেকে, অন্যটি মাতার দিক থেকে। তাই A শ্রেণীর কোনো উদ্ভিদের সঙ্গে B শ্রেণীর কোনো উদ্ভিদের সংমিশ্রণে জাত F_1 প্রজার প্রত্যেক উদ্ভিদের জীন দুটির রূপ হবে Yy। আবার F_1 প্রজার দুটি উদ্ভিদের সংমিশ্রণে যে F_2 প্রজার জন্ম হবে, তার কোনো উদ্ভিদের জীন দুটিরও একটি আসবে পিতার দিক থেকে এবং একটি মাতার দিক থেকে। এভাবে চারটি বিকল্পের কথা ভাবা যেতে পারে :

		পিতার কাছ থেকে	
		Y	y
মাতার কাছ থেকে	Y	YY	Yy
	y	Yy	yy

এই চারটি বিকল্পকে সমসম্ভাব্য মনে করা যেতে পারে। ফলে, F_2-র কোনো উদ্ভিদের পক্ষে A, B ও C শ্রেণীভুক্ত হওয়ার সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ ও $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$।

মটর গাছের বেলায় A শ্রেণীর গাছ ও C শ্রেণীর গাছের মধ্যে আপাতদৃষ্টিতে কোনো বৈষম্য লক্ষিত হবে না। কারণ, হলুদ ও সবুজ

রঙের মধ্যে হলুদের প্রভাব তীব্রতর (dominant); তাই একটি হলুদের জীন (Y) আর একটি সবুজের জীন (y) থাকলে আবরণ হলুদই হবে। তাই F_2 প্রজার কোনো উদ্ভিদের পক্ষে হলুদ আবরণের বীজ ও সবুজ আবরণের বীজ বহন করার সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ ও $\frac{1}{4}$। আর তা হলে F_2 প্রজার অনেক উদ্ভিদ্ নিলে দুই প্রকার উদ্ভিদের সংখ্যার অনুপাত 3 : 1 এই অনুপাত থেকে অল্প পরিমাণেই ভিন্ন হবে।

জনসমষ্টির আলোচনায়

কোনো দেশের জনসমষ্টির আলোচনায় সম্ভাবনাতত্ত্বকে কাজে লাগানো যায়। জনসমষ্টির জন্মহার ও মৃত্যুহার, জনসংখ্যার হ্রাস-বৃদ্ধি ইত্যাদির বর্ণনায় ও ভবিষ্যতে কোনো সময়ে জনসংখ্যা কত হবে তার অনুমানে সম্ভাবনাতত্ত্বের সাহায্য নেওয়া হয়।

এখানে মৃত্যুহারের কথাই আলোচনা করা যাক। আমরা আগেই দেখেছি কোনো ঘটনার আনুপাতিক পরিসংখ্যাকে তার সম্ভাবনার আসন্ন মান হিসেবে গ্রহণ করা হয়। ধরা যাক কোনো বর্ষে একটি দেশে x থেকে x+1 বৎসর বয়স্ক লোকের সংখ্যা P_x এবং ঐ বর্ষে তাদের মৃত্যু-সংখ্যা D_x, তা হলে ঐ বয়সের লোকদের মৃত্যুহার হল D_x/P_x। এই সংখ্যাটিকে x থেকে x+1 বৎসর বয়স্ক লোকের পক্ষে ঐ বয়সে মৃত্যুর সম্ভাবনা বলে দেখা যেতে পারে। এরূপ সংখ্যা থেকে আবার x বৎসর বয়স্ক কোনো লোকের পক্ষে x+1 বৎসরে পৌঁছানোর পূর্বেই মারা যাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করা যাবে। এই সম্ভাবনাকে যদি q_x দিয়ে সূচিত করা হয়, তবে $1-q_x=p_x$-কে x-বৎসর বয়স্ক লোকের পক্ষে আরো (অন্তত) এক বছর বেঁচে থাকার সম্ভাবনা হিসেবে দেখতে হবে।

q_x-এর মানসমূহের ভিত্তিতে দেশের জনসমষ্টির জন্যে জীবনছক

(life table) তৈরি করা হয়। যদি একই সময়ে জাত l_0 জন লোকের কোনো সমষ্টির কথা ভাবা যায়, তবে $d_0 = l_0 \, q_0$ হবে এরূপ লোকদের মধ্যে জীবনের প্রথম বৎসরে (প্রত্যাশিত) মৃত্যু-সংখ্যা আর $l_1 = l_0 - d_0$ হবে প্রথম বৎসরের শেষে এদের মধ্যে জীবিত লোকের সংখ্যা। তেমনি বলা যায় এদের মধ্যে $d_x = l_x q_x$ জন লোক x থেকে x+1 বৎসর বয়সের মধ্যে মারা যাবে, আর অবশিষ্ট $l_{x+1} = l_x - d_x$ জন x+1 বৎসর বয়সে বেঁচে থাকবে। জীবনছকে আবার দেখানো হবে ঐ দেশের সদ্যোজাত শিশু ও বিভিন্ন বয়সের লোকের ভবিষ্যৎ প্রত্যাশিত আয়ু কত।

জীবনছকের সাহায্যে শুধু যে কোনো দেশে মৃত্যুর প্রকোপ সম্বন্ধেই সম্যক ধারণা দেওয়া যায়, এমন নয়। দুই বা ততোধিক দেশের জীবন-ছক তুলনা করে তাদের আপেক্ষিক মৃত্যুহার সম্পর্কেও একটি সুস্পষ্ট চিত্র লাভ করা যায়। দেশের মৃত্যুহারের ভিত্তিতে প্রস্তুত জীবনছক আর জন্মহার একত্র করে, দেশের জনসমষ্টির বর্তমান সংখ্যা ও গঠনের আলোকে, ভবিষ্যৎ কোনো সময়ে তার সংখ্যা ও গঠন কীরূপ হবে সে সম্বন্ধেও আভাস দেওয়া সম্ভব।

ব্যবসায় ও প্রশাসনিক কর্মে

সাম্প্রতিক কালে সম্ভাবনাতত্ত্ব ব্যবসায় প্রতিষ্ঠানের সুষ্ঠু পরিচালনায় ও দেশের প্রশাসনিক কর্মেও সক্রিয় ভূমিকা গ্রহণ করছে।

মনে করা যাক কোনো শহরে একটি রুটির কারখানা আছে। প্রতি কিলোগ্রাম রুটির দাম k পয়সা, কিন্তু অবিক্রীত রুটি থাকলে তা দিনের শেষে কিলো প্রতি l পয়সা খরচে বিলি করে দেওয়া হয়; আর রুটি প্রস্তুতে ব্যয় কিলো প্রতি m পয়সা। কারখানার উদ্দেশ্য যদি এই হয় যে, প্রত্যাশিত লাভকে যথাসম্ভব বাড়াতে হবে, তবে সে জন্যে দৈনিক কত

কিলো রুটি উৎপাদন করা সমীচীন তা নির্ণয় করা অভিপ্রেত হতে পারে। রুটির দৈনিক চাহিদার সম্ভাবনা-বিভাজনের ভিত্তিতে এটা নির্ণয় করা যাবে।

জীবনবীমা সংক্রান্ত কোনো কাজে যাঁরা অংশ নিয়েছেন তাঁরাই জানেন যে, প্রিমিয়ামের হার বীমাকারীর বয়সভেদে ও বীমার মেয়াদের দৈর্ঘ্যভেদে বিভিন্ন হয়। প্রিমিয়ামের এই হার নির্ধারণেও সম্ভাবনাতত্ত্বের প্রয়োগ করা হয় এবং এটা করা হয় সংশ্লিষ্ট জনসমষ্টির জীবনছকের মাধ্যমে।

তেমনি, কোনো সরকারী বা বেসরকারী অফিসে কতজন কর্মচারী থাকা দরকার, তাদের মধ্যে কর্মবণ্টন কী ভাবে করা উচিত ইত্যাদি প্রশ্নের উত্তর সম্ভাবনাতত্ত্বের সাহায্যে দেওয়া সম্ভব। আবার, মনে করা যাক একটি শহরে টেলিফোন এক্সচেঞ্জ স্থাপন করা হবে। শহরের লোকসংখ্যা ও ব্যাবসা-বাণিজ্যের গুরুত্বের পরিপ্রেক্ষিতে কতগুলি টেলিফোন লাইন রাখা সমীচীন, কতজন কর্মচারী নিয়োগ করতে হবে এবং তাদের কার্যসূচী কীভাবে স্থির করলে সবচেয়ে সুবিধে হবে ইত্যাদি প্রশ্নের উত্তরও সম্ভাবনাত্ত্বের ভিত্তিতে দেওয়া যেতে পারে।

প্রশাসনিক কাজে সম্ভাবনাতত্ত্বের আরো অনেক প্রয়োগ হয় রাশি-বিজ্ঞানের মাধ্যমে। এখানে খুব সাধারণ একটি উদাহরণ দেওয়া যেতে পারে। ধরা যাক রাজ্যসরকারের স্বাস্থ্য দফতরের হাতে বসন্তরোগের নূতন একটি প্রতিষেধক টীকা এসেছে। কিন্তু এটি চালু করার আগে এ কতটুকু ফলপ্রদ হবে সে সম্বন্ধে সম্যক ধারণা করা তাঁদের উদ্দেশ্য। এ উদ্দেশ্যে তাঁরা প্রথমে কিছু লোককে রাজ্যের সমগ্র জনসমষ্টির সমসম্ভাব্য অংশক (random sample) হিসেবে নির্বাচন করবেন। অংশকে যদি n জন লোক থাকে, তবে তাদের প্রত্যেককে টীকা দেওয়া হবে। এবং বসন্তের মরশুমের শেষে এদের মধ্যে কতজন নীরোগ থাকে তা দেখা

হবে। তা হলে অংশকে নীরোগ ব্যক্তিদের সংখ্যার অনুপাত x/n-কে টীকার কার্যকারিতার পরিমাপ হিসেবে দেখা যেতে পারে। প্রকৃতপক্ষে এটি রাজ্যের জনসমষ্টির জন্যে ঐ টীকার ফলপ্রদ হওয়ার সম্ভাবনার অনুমানাঙ্ক। এটি অপ্রবণ ও সমঞ্জস অনুমানাঙ্ক। আবার, এ ক্ষেত্রে পূর্বে যে টীকা ব্যবহার করা হত তার তুলনায় নতুন টীকা উৎকৃষ্টতর কি না তা দেখা স্বাস্থ্য দফতরের উদ্দেশ্য হতে পারে। ধরা যাক পুরনো টীকা গ্রহণে নীরোগ থাকার সম্ভাবনা p_0 এবং নতুন টীকায় এ সম্ভাবনা p (যা অজ্ঞাত)। নতুন টীকাকে উৎকৃষ্টতর বলা যায় যদি $p > p_0$ হয়। তাই এক্ষেত্রে $p = p_0$ এই প্রকল্পটি বিচার করতে হবে। এখানে প্রাসঙ্গিক বিপরীত প্রকল্প হল $p > p_0$। অংশকে নীরোগ ব্যক্তিদের সংখ্যা x-এর মান অনুসারে প্রকল্প গ্রহণযোগ্য হলে বুঝতে হবে নতুন টীকার অতিরিক্ত কার্যকরতা নেই। অন্যদিকে, প্রকল্প বর্জনীয় হলে বুঝতে হবে নতুন টীকার অতিরিক্ত কার্যকরতা সূচিত হচ্ছে।

সম্ভাবনা$_1$ প্রসঙ্গে
কয়েকটি কথা

আলোচনার সার্থকতা

আমরা প্রারম্ভেই দুই ধরনের সম্ভাবনার কথা বলেছিলাম— সম্ভাবনা$_1$ ও সম্ভাবনা$_2$। এদের দ্বিতীয়টিকে নিয়েই পূর্ববর্তী অধ্যায়গুলিতে বিশদ আলোচনা করা হয়েছে। বর্তমান অধ্যায়ে প্রথম প্রকারের সম্ভাবনা সম্বন্ধেও কয়েকটি কথা বলা হবে। এরূপ আলোচনার সার্থকতা রয়েছে, কারণ সম্ভাবনা$_1$ সম্পর্কে প্রভৃত দার্শনিক ভাবনার কথা ছেড়ে দিলেও আধুনিক কালে কয়েকজন বিশিষ্ট বিজ্ঞানীর চিন্তাধারায় এই শ্রেণীর সম্ভাবনা স্থান পেয়েছে। কেইন্‌স্ (Keynes), জেফ্রিস (Jeffreys), দ্য ফিনেত্তি (de Finetti), স্যাভেজ (Savage), প্রমুখ মনীষিরা বৈজ্ঞানিক আলোচনা প্রসঙ্গেও এই জাতীয় সম্ভাবনা ব্যবহারের পক্ষপাতী।

সম্ভাবনা$_1$ সম্পর্কে আলোচনা দুটি প্রধান ধারায় প্রবাহিত হয়েছে। প্রথম ধারাটি কেইন্‌স্ ও জেফ্রিসের চিন্তায় স্থান পেয়েছে এবং এই ধারাটিকে সহজাত সম্ভাবনা (necessary probability)-র ধারা বলা যেতে পারে। অন্যটি র‍্যামজে (Ramsey), দ্য ফিনেত্তি ও স্যাভেজের ভাবনায় স্থানলাভ করেছে এবং এটিকে বলা যায় ব্যক্তিগত সম্ভাবনা (personal probability)-র ধারা।

সহজাত সম্ভাবনা

সহজাত সম্ভাবনার দৃষ্টিভঙ্গী অনুযায়ী কোনো উক্তি প্রসঙ্গেই 'সম্ভাবনা' কথাটি প্রযোজ্য মনে করা হয়, কোনো ঘটনা প্রসঙ্গে নয়— যদিও উক্তিটি কোনো ঘটনা সম্বন্ধে হতে পারে। সম্ভাবনাকে এখানে দেখা হয় বক্তা তাঁর উক্তিতে, যুক্তিসম্মতভাবে ও অভিজ্ঞতা-প্রসূত সাক্ষ্যের ভিত্তিতে,

যে আস্থা স্থাপন করতে পারেন তারই মাত্রা হিসেবে। কোনো ঘটনার সম্ভাবনা$_2$ যেমন অর্থবহ শুধুমাত্র কোনো পরীক্ষা-প্রসঙ্গে, কোনো উক্তির সম্ভাবনা$_1$-ও তেমনি অর্থবহ শুধুমাত্র বক্তার অর্জিত তথ্যের প্রসঙ্গে।

এই দৃষ্টিভঙ্গীতে সম্ভাবনাতত্ত্বকে অবরোহী তর্কশাস্ত্র (deductive logic)-এর একটি শাখা হিসেবে গণ্য করা হয়। পুরাতন অবরোহী তর্কশাস্ত্রে তর্কের লক্ষ্য থাকে পূর্ণ নৈশ্চিত্য, নিশ্চিত সিদ্ধান্তে আসাই তার উদ্দেশ্য। কিন্তু অন্য ধরনের তর্ক থাকতে পারে যা সমান যুক্তিসহ, কিন্তু যার সিদ্ধান্ত নিশ্চিত হওয়ার পরিবর্তে শুধু অল্পাধিক গুরুত্বের দাবি করতে পারে। সহজাত সম্ভাবনার দৃষ্টিতে এরূপ তর্কই সম্ভাবনাতত্ত্বের বিষয়বস্তু।

সম্ভাবনার এই ধারণাকে সহজাত বলা হয়, কারণ এর অর্থ হল কী মাত্রায় এক বা ততোধিক উক্তি (লব্ধ জ্ঞানের সমষ্টি) তার্কিক দিক থেকে স্বাভাবিকভাবে অন্য একটি উক্তির (যে উক্তিতে একটি সম্ভাবনা আরোপিত হচ্ছে তার) সত্যতা সূচিত করে। বস্তুত, এই মতাবলম্বীরা স্বীকার করেন না যে, সম্ভাবনা$_1$ ব্যক্তিনির্ভর সম্ভাবনা। কারণ, তাঁদের মতে কোনো নির্দিষ্ট তথ্যসমষ্টি দেওয়া থাকলে তার ভিত্তিতে কোনো প্রতিপাদ্যে আরোপ করার মতো বিশ্বাসের মাত্রা এক ও অভিন্ন হবে। সম্ভাবনাটি ব্যক্তি থেকে ব্যক্তিতে পরিবর্তিত হয় শুধু এই কারণে যে, বিভিন্ন ব্যক্তির স্ব স্ব লব্ধ তথ্যও বিভিন্ন।

সহজাত সম্ভাবনার সমর্থকরা একটি সম্ভাবনা-গণিতও উপস্থাপিত করেছেন যা মুখ্যত কল্‌মগরভের তত্ত্বে ব্যবহৃত গণিতের অনুরূপ।

যে কোনো দুই উক্তির সম্ভাবনা তুলনা করতে গিয়ে তাঁরা ঔদাসীন্যের নীতি (Principle of indifference) প্রয়োগ করবেন। এই নীতি অনুসারে বক্তা বিচারবুদ্ধি নির্ভর করে অপ্রাসঙ্গিক তথ্যকে (অর্থাৎ সিদ্ধান্তের সঙ্গে যে তথ্যের কোনো সম্বন্ধ নেই তাকে) প্রাসঙ্গিক তথ্য

থেকে পৃথক করবেন। অপ্রাসঙ্গিক তথ্য এভাবে বর্জন করার পর দুই বিকল্প সিদ্ধান্তের সম্ভাবনা তখনই সমান বলে ধরা হবে যখন উভয়ের জন্যে, প্রাসঙ্গিক তথ্য এক ও অভিন্ন। পক্ষান্তরে, যদি এদের মধ্যে একটি সিদ্ধান্তের জন্যে, উভয়ের সাধারণ প্রাসঙ্গিক তথ্য ছাড়াও, অতিরিক্ত কোনো তথ্য থাকে যা এই সিদ্ধান্তের অনুকূল, তবে এই সিদ্ধান্তের সম্ভাবনা বৃহত্তর বলে ধার্য হবে।

কোনো একটি উক্তির নিজস্ব সম্ভাবনা নির্ণয়ও প্রয়োজন হতে পারে। কারণ, ক্ষেত্রবিশেষে একটি উক্তি অন্য একটির চেয়ে অধিকতর সম্ভাবনা-যুক্ত এটা জানাই যথেষ্ট নয়— প্রথমটির সম্ভাবনা দ্বিতীয়টির সম্ভাবনার চেয়ে কী পরিমাণ বেশি তা জানাও ব্যবহারিক দিক থেকে অভিপ্রেত হতে পারে। সহজাত সম্ভাবনার সমর্থকরা মনে করেন এই পরিমাপণ শুধু তখনই সম্ভব হবে যখন প্রদত্ত তথ্যসমষ্টি থেকে সঞ্জাত সিদ্ধান্তসমূহকে কতকগুলি পরস্পর ব্যতিরেকী ও সমসম্ভাব্য ভাগে ভাগ করা যাবে। যদি এ ধরনের N-টি বিকল্প সিদ্ধান্ত থাকে এবং তার মধ্যে M-টি যদি প্রদত্ত উক্তির অনুকূল হয়, তবে উক্তির সম্ভাবনা M/N।

ব্যক্তিগত সম্ভাবনা

ব্যক্তিগত সম্ভাবনাকে দেখা হয় বক্তার নিকট উক্তির যুক্তিসম্মত গ্রহণ-যোগ্যতা (বা তৎকর্তৃক উক্তির উপর যুক্তিসম্মতভাবে আরোপিত আস্থার মাত্রা) হিসেবে— যে গ্রহণযোগ্যতা বা আস্থার মাত্রা কার্যত তাঁর আচরণে প্রতিভাত হয়।

সহজাত সম্ভাবনার ন্যায় এক্ষেত্রেও ব্যক্তিকে তাঁর আচরণে বিচারশীল বলে ধরে নেওয়া হয়। কিন্তু বিচারশীল মানুষ বলতে এখানে বোঝানো হয় এমন মানুষ যিনি সর্বক্ষেত্রে তাঁর কার্যের ভিতর দিয়ে গরিষ্ঠ উপযোগিতা (utility) আহরণে সচেষ্ট থাকেন। উপরন্তু, ব্যক্তিগত

সম্ভাবনার দৃষ্টিভঙ্গী অপেক্ষাকৃত সরল ও নমনীয় (flexible), কারণ এই দৃষ্টিভঙ্গী অনুসারে এটা ধরে নেওয়া যায় যে, দু-জন সমান বিচারশীল মানুষ কর্তৃক, একই তথ্যের ভিত্তিতে, উক্তিতে আরোপিত বিশ্বাসের মাত্রা বিভিন্ন হতে পারে। ব্যক্তিগত সম্ভাবনার ধারণাটি স্পষ্টতর করার জন্যে দুটি সহজ উদাহরণ নেওয়া যাক।

প্রথমত, ধরুন এক ব্যক্তি দোকানে গিয়ে একটা কলম কিনতে চেয়েছেন। বিক্রেতা তাঁকে একই দামের, কিন্তু দুটি ভিন্ন প্রকারের— বলা যাক প্রথম ও দ্বিতীয় প্রকারের— কলম দেখালেন। এক্ষেত্রে ক্রেতা যদি প্রথম ধরনের কলম বেছে নেন, তবে বুঝতে হবে তাঁর কাছে 'প্রথম প্রকারের কলম উৎকৃষ্টতর' এই উক্তিটির সম্ভাবনা 'দ্বিতীয় প্রকারের কলম উৎকৃষ্টতর' এই উক্তিটির সম্ভাবনার তুলনায় বৃহত্তর। এ থেকে বোঝা যাবে কেমন করে দুই বা ততোধিক উক্তির সম্ভাবনা তুলনা করা যেতে পারে। দ্বিতীয়ত, কোনো উক্তি S-এর সম্ভাবনা নিরূপণের জন্যে আমরা এক ধরনের জুয়া খেলার কথা ভাবতে পারি, যে খেলায় প্রতিটি প্রয়াসের জন্যে সমান মূল্য (ধরা যাক a টাকা করে) দিতে হয়। মনে করা যাক খেলার নিয়মানুসারে প্রতি খেলোয়াড়কে বলতে হবে S সঠিক কি সঠিক নয় ; আর উত্তর অভ্রান্ত হলে খেলোয়াড়কে ঐ প্রয়াসের জন্যে একটি উত্তম পুরস্কার দেওয়া হবে। পুরস্কারটি দেওয়া হবে সকল খেলার শেষে এবং ইতিমধ্যে সঠিক উত্তরটি খেলোয়াড়দের কাউকেই বলা হবে না। এক্ষেত্রে কোনো ব্যক্তি যদি দশ বার খেলায় যোগ দেন এবং তার মধ্যে ছ বার বলেন যে, S-ই ঠিক (এবং বাকি চারবার বলেন $\bar{S}$ ঠিক অর্থাৎ S ঠিক নয়), তবে S-এর জন্যে তাঁর ব্যক্তিগত সম্ভাবনার আসন্ন মান 0·6। এই সম্ভাবনা আরো নির্ভুলভাবে নির্ণয় করতে হলে মনে করা যাক ঐ ব্যক্তি একশো বার খেলায় যোগ দিলেন এবং তার মধ্যে তেষট্টি বার বললেন S-ই ঠিক। সেক্ষেত্রে তাঁর ব্যক্তিগত সম্ভাবনার আসন্ন মান (দুই

দশমিক স্থান পর্যন্ত সঠিক) 0·63।

প্রকৃতপক্ষে, এই দৃষ্টিভঙ্গীর একটি প্রধান বৈশিষ্ট্য হল এই যে, এখানে কোনো উক্তির সম্ভাবনা নির্ণয়ের জন্যে একটি ব্যবহারিক সূত্র রয়েছে। সূত্রের মর্ম এই যে, যদি $P(S)$ ও $P(S')$ কোনো ব্যক্তির কাছে S ও S'-এর জন্যে ব্যক্তিগত সম্ভাবনা সূচিত করে, তবে $P(S)$ ও $P(S')$-এর অনুপাত কোনো জুয়া খেলায় তিনি যে অনুপাতে S ও S'-এর অনুকূলে তাঁর বাজির টাকা ভাগ করে দেবেন তার সমান হবে।

উল্লেখ্য যে, দুই ভিন্ন দৃষ্টিভঙ্গীর (সহজাত সম্ভাবনা ও ব্যক্তিগত সম্ভাবনার) পোষকরা অন্তত একটি বিষয়ে একমত: উভয়ের মতেই সম্ভাবনা$_1$-এর সাধারণ লক্ষণগুলি সম্ভাবনা$_2$-এর ন্যায়ই হওয়া সঙ্গত। তাই সম্ভাবনা$_1$-এর গাণিতিক তত্ত্ব গড়ে তুলতে গিয়ে উভয় দলই মুখ্যত সমপ্রকৃতির স্বীকার্যের উপর নির্ভর করেন, এবং এই স্বীকার্যগুলি কল্‌মগরভের তত্ত্বে ব্যবহৃত স্বীকার্যের অনুরূপ।

বিজ্ঞানচর্চায় ব্যক্তিগত সম্ভাবনার স্থান

অনেকের কাছে ব্যক্তিগত সম্ভাবনার ধারণাটি অবৈজ্ঞানিক বলে মনে হতে পারে। কারণ, সাধারণত এটাই ধরে নেওয়া হয় যে, বিজ্ঞানের ধ্যান-ধারণা ও তার সিদ্ধান্তসমূহ সম্পূর্ণ বস্তুনির্ভর হওয়া অভিপ্রেত। বিজ্ঞানকর্মীর ব্যক্তিগত মতামত কোনোভাবেই পরীক্ষার ফল ও তাদের ব্যাখ্যাকে প্রভাবিত করবে না, এটাই সাধারণভাবে সমীচীন বলে মনে হবে।

ব্যক্তিগত-সম্ভাবনাবাদীরা কিন্তু মনে করেন তাঁদের দৃষ্টিভঙ্গী কোনো প্রকারেই বিজ্ঞানচেতনার বিরোধী নয়। কারণ, পূর্ণ বস্তুনির্ভরতা বিজ্ঞানের লক্ষ্য হলেও এই লক্ষ্যে বিজ্ঞান কখনো পৌঁছতে পারে না। পরীক্ষার ফল বিজ্ঞানকর্মীর মনে যে প্রতিক্রিয়া সৃষ্টি করে, তা সর্বদাই ব্যক্তিগত

কারণপ্রণালীর দ্বারা প্রভাবিত হয়। তাঁর পছন্দ-অপছন্দ পরীক্ষা সম্পাদনের পদ্ধতি ও পরীক্ষালব্ধ তথ্যকে প্রভাবিত করবেই। ব্যক্তিনির্ভরতা থেকে সম্পূর্ণ অব্যাহতি তাই কল্পনাতীত। তাই তাঁদের মতে বিজ্ঞান-চিন্তায় ব্যক্তিগত সম্ভাবনার স্থান না থাকারও কোনো হেতু নেই।

বেইজীয় গোষ্ঠী

এই ভাবধারা প্রয়োগ করার প্রকৃষ্ট উদাহরণ হিসেবে আমরা স্যাভেজ ও তাঁর দলভুক্তদের অনুসৃত, বেইজীয় নিয়ম (Bayes' rule)-এর মাধ্যমে, কোনো প্রকল্পের উত্তর সম্ভাবনা (posterior probability) নির্ণয়ের পদ্ধতির কথা বলতে পারি।

মনে করা যাক $H_1, H_2, \cdots$ এই প্রকল্পগুলি পরস্পর ব্যতিরেকী এবং তাদের পূর্ব সম্ভাবনা (prior probability) $P(H_1)$, $P(H_2)$ ইত্যাদির প্রত্যেকটি ধনাত্মক। যে পরীক্ষার ভিত্তিতে প্রকল্পগুলির গ্রহণযোগ্যতা বিচার করতে হবে তার কোনো ফলকে E-দ্বারা সূচিত করলে, মনে করা যাক $P(E)$-ও ধনাত্মক। আমাদের ব্যবহৃত প্রতীকমালা অনুসারে $P(E)$ হল E-র শর্তহীন সম্ভাবনা, আর $P(E \mid H_i)$ হল H_i-ই সত্য এই শর্তসাপেক্ষে E-র সম্ভাবনা। বেইজীয় নিয়মের সাহায্যে লব্ধ তথ্য E-র পরিপ্রেক্ষিতে H_i-এর শর্তাধীন সম্ভাবনা বা উত্তর সম্ভাবনা $P(H_i \mid E)$ নির্ণয় করা যাবে। সংক্ষেপে এই নিয়মের মর্ম এই যে, যেহেতু

$$P(E) \times P(H_i \mid E) = P(H_i) \times P(E \mid H_i) = P(H_i \text{ ও } E),$$

তাই

$$P(H_i \mid E) = \frac{P(H_i) \times P(E \mid H_i)}{P(E)}$$

$$= \frac{P(H_i) \times P(E \mid H_i)}{P(H_1) \times P(E \mid H_1) + P(H_2) \times P(E \mid H_2) + \cdots}$$

(এখানে ধরা হয়েছে যে, প্রকল্পগুলির মোট সংখ্যা সসীম অথবা তাদের সংখ্যা অসীম হলেও প্রকল্পগুলিকে প্রথম, দ্বিতীয়,⋯—এভাবে সাজানো যেতে পারে। কিন্তু প্রকল্প H অবিচ্ছিন্ন চলকের ন্যায় হলেও সেক্ষেত্রে বেইজীয় নিয়মকে প্রসারিত করা যাবে।)

স্যাভেজ ও তাঁর দলভুক্তরা এই নিয়মকে পারিসংখ্যানিক অনুমিতি (statistical inference)-এর ক্ষেত্রে প্রধান স্থান দিয়েছেন। বস্তুত এঁদের দলটিকে বেইজীয় গোষ্ঠী (the Bayesian school) নাম দেওয়া হয়েছে।

আমাদের সমস্যা হতে পারে সকল প্রকল্প থেকে (প্রদত্ত তথ্যের আলোকে) সর্বাধিক গ্রহণযোগ্য প্রকল্পটি বেছে নেওয়া অথবা এরূপ একাধিক প্রকল্পের নির্ণয় যাদের সমষ্টিকে অন্য প্রকল্প সমষ্টির তুলনায় অধিকতর গ্রহণযোগ্য বলা যায়।

এরূপ সমস্যার সমাধানে রাশিবিজ্ঞানীরা সাধারণত অন্য পন্থার—যেমন ফিশারীয় প্রাক্কলন তত্ত্ব (Fisher's theory of estimation), নেম্যান ও পিয়ার্সনের প্রকল্পবিচার তত্ত্ব (Neyman and Pearson's theory of testing of hypotheses) বা নেম্যানের আস্থাসূচক অন্তরের তত্ত্ব (Neyman's theory of confidence intervals)—শরণ নেন। তাঁদের মতে বেইজীয় নিয়মের প্রয়োগ খুব অল্প ক্ষেত্রেই সমীচীন হবে, কারণ কোনো প্রকল্পের পূর্ব সম্ভাবনাকে খুব অল্পক্ষেত্রেই আনুপাতিক পরিসংখ্যার 'সীমা' হিসেবে গণ্য করা যাবে।

পক্ষান্তরে, পারিসংখ্যানিক অনুমিতির বিভিন্ন সমস্যার সমাধানে সম্পূর্ণ বিভিন্ন পন্থা অবলম্বন করা হবে, এটা বেইজীয় গোষ্ঠীর অভীপ্সিত নয়। রাশিবিজ্ঞানের সনাতন পন্থায় যে ঐক্যের অভাব রয়েছে, এঁরা বেইজীয় নিয়মের মাধ্যমে সেই ঐক্য প্রতিষ্ঠার পক্ষপাতী। পূর্ব সম্ভাবনা সংক্রান্ত অসুবিধাটুকু তাঁদের মতে অনতিক্রম্য নয়। কারণ, প্রত্যেক অনুসন্ধানী

বিজ্ঞানকর্মী প্রকল্পগুলি সম্বন্ধে খানিকটা জ্ঞান নিয়েই কাজ শুরু করেন এবং সম্যক্‌ভাবে চিন্তা করে নিলে তাঁর পক্ষে প্রকল্পগুলি সম্পর্কে তাঁর ব্যক্তিগত পূর্ব সম্ভাবনা নির্ণয় দুরূহ হবে না। এবারে এই ব্যক্তিগত পূর্ব সম্ভাবনাগুলিকে $P(E \mid H_1)$, $P(E \mid H_2)$ ইত্যাদি শর্তাধীন সম্ভাবনার সঙ্গে যুক্ত করে বেইজীয় নিয়মে প্রত্যেক প্রকল্পের উত্তর সম্ভাবনা নির্ণয় করা যাবে। এই শর্তাধীন সম্ভাবনাগুলিকে অবশ্য আনুপাতিক পরিসংখ্যার 'সীমা' (অর্থাৎ সম্ভাবনা$_2$) হিসেবেই দেখা যেতে পারে। এভাবে প্রতি প্রকল্পের উত্তর সম্ভাবনা নির্ণয় করে তার ভিত্তিতে প্রকল্পের গ্রহণ-যোগ্যতা বিচার করা যাবে।

উপসংহার

বোধ হয় পারিসংখ্যানিক অনুমিতির পরিপ্রেক্ষিতেই সম্ভাবনা$_1$-এর প্রয়োজনীয়তার (বা অপ্রয়োজনীয়তার) প্রকৃষ্ট বিচার সম্ভব। এটা তা হলে প্রতীয়মান হবে যে, সহজাত সম্ভাবনার দৃষ্টিভঙ্গী অত্যন্ত অনমনীয় (rigid)। বিশেষ করে, যেহেতু এই দৃষ্টিভঙ্গীতে কোনো নির্দিষ্ট উক্তির সম্ভাবনা নিরূপণের জন্যে বাস্তব পন্থা নেই, তাই এর ব্যবহারিক উপযোগিতা সীমিত।

পক্ষান্তরে, ব্যক্তিগত সম্ভাবনার দৃষ্টিভঙ্গী খুবই অর্থবহ এবং এর সরলতর প্রকৃতির জন্যে ব্যবহারিক দিক থেকে সহায়ক। কারণ, এটা মানতেই হবে যে, অনুসন্ধানী তাঁর পরীক্ষাক্ষেত্র সম্পর্কে খানিকটা জ্ঞান নিয়েই কাজ আরম্ভ করেন সে জ্ঞান যতই অস্পষ্ট হোক না কেন। পরীক্ষা সম্পাদনে উদ্দেশ্য থাকে পরীক্ষালব্ধ তথ্যের ভিত্তিতে ঐ ক্ষেত্র সম্বন্ধে অভিমত গঠন। কিন্তু পরীক্ষালব্ধ তথ্য প্রারম্ভিক অভিমত কেমন করে সংশোধন করতে হবে, শুধু তারই নির্দেশ দেবে। কোন্ অভিমত গ্রহণ-যোগ্য তা নির্দেশ করা পরীক্ষাসম্পাদনের আসল উদ্দেশ্য নয়। প্রারম্ভিক

অভিমতকে এই কারণেই পরীক্ষার কাঠামোয় স্থান দেওয়া সমীচীন মনে হবে, আর ব্যক্তিগত সম্ভাবনা হল এটা করার একটি প্রকৃষ্ট উপায়।

পারিসংখ্যানিক অনুমিতিতে যে কথাটা প্রচ্ছন্নভাবে ধরে নেওয়া হয়, তা হল এই যে, প্রারম্ভে বস্তুজগতের নির্দিষ্ট অংশ সম্পর্কে (হয়তো ব্যবহৃত সম্ভাবনা বিভাজনের কোনো পূর্ণাঙ্ক সম্বন্ধে) কোনো তথ্যই বিজ্ঞানকর্মীর হাতে থাকবে না। কিন্তু এরূপ মনে করা সঙ্গত নয়। উদাহরণ-স্বরূপ বলা যায়, কোনো সুষম বিভাজনের প্রত্যাশিত মান μ সম্বন্ধে প্রকল্প বিচার করতে গিয়ে প্রারম্ভে সাধারণত ধরে নেওয়া হয় যে μ সম্পূর্ণ অজ্ঞাত ($-\infty < \mu < \infty$)। কিন্তু বহুক্ষেত্রেই (যেমন, সুষম বিভাজনটি যখন বাঙালী প্রাপ্তবয়স্ক পুরুষদের উচ্চতার পরিসংখ্যা-বিভাজনের আদর্শরূপ হিসেবে গ্রহণ করা হয়) এরূপ মনে করা বাস্তববিরোধী হয়ে পড়বে। μ-কে একটি নাতিদীর্ঘ অন্তরে (বলা যাক α ও β-র মধ্যে) অবস্থিত বলে ধরে নেওয়াই সংগত হবে। একটি পূর্বসম্ভাবনা বিভাজন, যার সম্ভাবনা-ঘনত্ব অপেক্ষক $f(\mu)$ এরূপ যে, $\mu \leqslant \alpha$ বা $\mu \geqslant \beta$ হলে $f(\mu) = 0$, এখানে উপযুক্ত হবে। আর μ-এর পক্ষে কোনও অন্তরে থাকার সম্ভাবনাকে এখানে ব্যক্তিগত সম্ভাবনা হিসেবেই দেখা হচ্ছে, ফলে বিজ্ঞানকর্মী তাঁর অভিজ্ঞতা ও বিচারবুদ্ধির আলোকে একটি উপযুক্ত $f(\mu)$ বেছে নিতে পারবেন। এই সম্ভাবনা-ঘনত্ব অপেক্ষক $f(\mu)$-কে বেইজের নিয়মে ব্যবহার করা যাবে।

বেইজীয় গোষ্ঠীর লোকেরা বলেন, অন্য বিজ্ঞানকর্মীরা যেখানে অজ্ঞাতসারে বা অনিচ্ছায় তাঁদের পরীক্ষার ফলকে ব্যক্তিগত কারণ প্রণালী দ্বারা প্রভাবিত হতে দেন, সেখানে তাঁরা এই কাজটিই করেন সজ্ঞানে এবং (বেইজীয় নিয়মের মাধ্যমে) সুশৃঙ্খলভাবে। উপরের আলোচনা থেকে বেইজীয় গোষ্ঠীর এই দাবিতে খানিকটা যথার্থতা আছে বলেই মনে হবে।

লোকশিক্ষা গ্রন্থমালা

রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর

বিশ্বপরিচয় যন্ত্রস্থ

ইতিহাস ২'৫০

রথীন্দ্রনাথ ঠাকুর

প্রাণতত্ত্ব

নিত্যানন্দবিনোদ গোস্বামী

বাংলা সাহিত্যের কথা ২'০০

চারুচন্দ্র ভট্টাচার্য

ব্যাধির পরাজয় ১'৫০

পদার্থবিদ্যার নবযুগ

নির্মলকুমার বসু

হিন্দুসমাজের গড়ন ২'৫০

উমেশচন্দ্র ভট্টাচার্য

ভারতদর্শনসার ৩'৩০

শ্রীকুমার বন্দ্যোপাধ্যায়

বাংলা উপন্যাস ২'০০

শ্রীসুনীতিকুমার চট্টোপাধ্যায়

ভারতের ভাষা ও ভাষাসমস্যা

সুরেন্দ্রনাথ ঠাকুর

বিশ্বমানবের লক্ষ্মীলাভ ২'৩০

শ্রীসত্যেন্দ্রকুমার বসু

হিউএনচাঙ

যোগেশচন্দ্র রায় বিদ্যানিধি

পূজাপার্বণ ৩'০০

যোগেশচন্দ্র বাগল

বাংলার নব্যসংস্কৃতি ১'৪০

শ্রীপশুপতি ভট্টাচার্য

আহার ও আহার্য ১'৫০